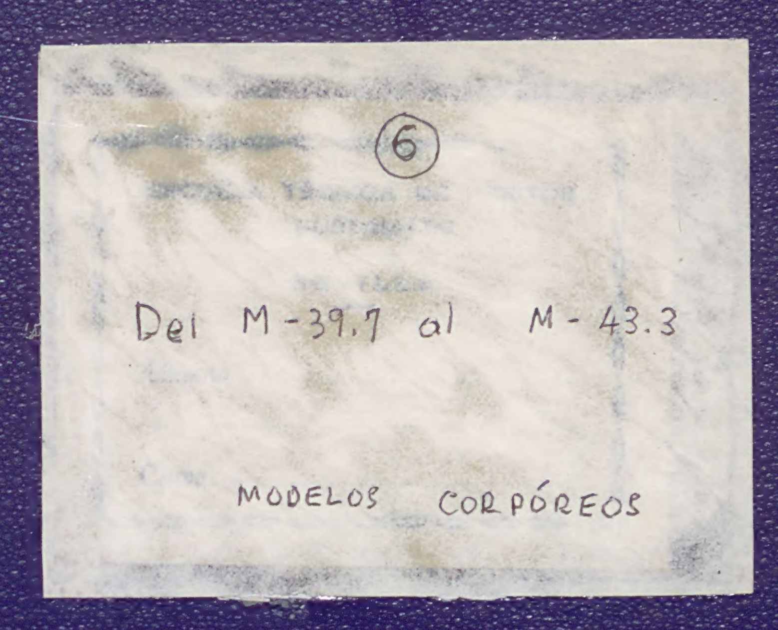
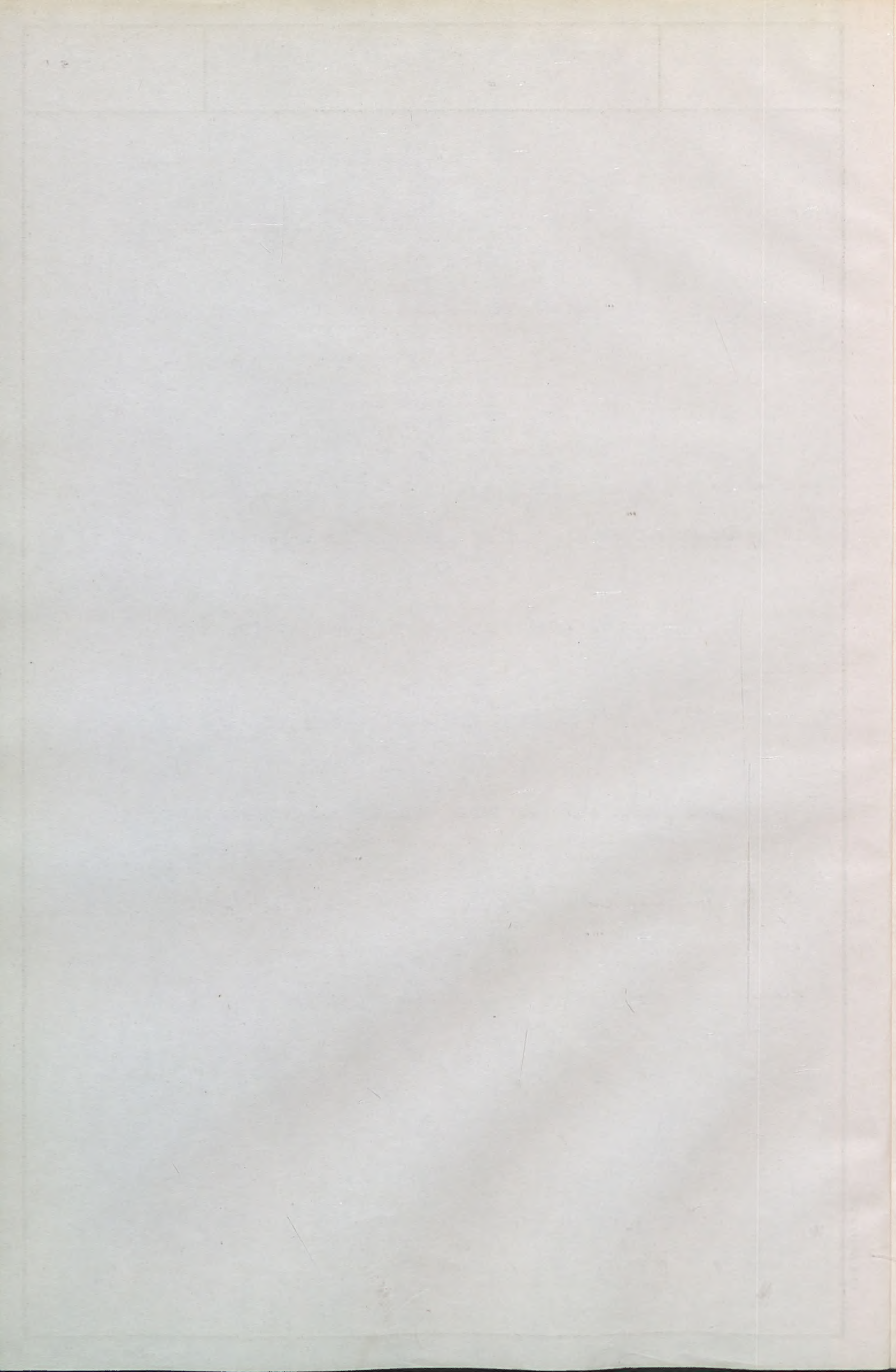

6
Del M-39.7 al M-43.3
MODELOS CORPÓREOS

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS SEMI-REGULARES CONVEXOS, O "POLIEDROS ARQUIMEDIANOS"

CONTINUACIÓN DEL ESTUDIO PREVIO A LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MISMOS.- PROCESO DE TRUNCADURA DE VÉRTICES EN LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS (LÁMINAS 1 A 5)



	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-39.7

ENUNCIADO: Continuación del estudio previo a la construcción de los poliedros Arquimedianos.- Proceso de obtención por el procedimiento de TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos.

Prosiguiendo el estudio iniciado en el modelo M-39.5, en el que hemos analizado ya dos posiciones sucesivas del plano secante π a las distancias:

1ª POSICIÓN $\quad 0 < x < \frac{1}{3} a_4 \quad$ (1)

2ª POSICIÓN $\quad x = \frac{1}{3} a_4 \quad$ (2)

en cuyas posiciones se estudiaron principalmente las características geométricas del poliedro núcleo resultante de la truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo a la distancia variable "x", estudiamos seguidamente la nueva posición nº 3.

3. 3   3ª POSICIÓN

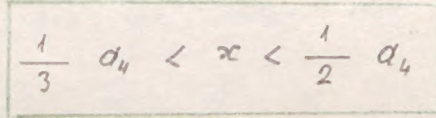
POLIEDRO NÚCLEO RESULTANTE DE LA TRUNCADURA DE TODOS LOS VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA

$$\frac{1}{3} a_4 < x < \frac{1}{2} a_4 \quad (3)$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Mayo 1980

Refiriéndonos a la figura 3, en la que se detalla la posición Π_2 del plano secante en una cara del tetraedro generador, supongamos un ligero desplazamiento del mismo entre los límites (3), cuyo resultado se expresa en la figura 4.



$$\frac{1}{3}\, a_4 < x < \frac{1}{2}\, a_4$$

En esta posición, el plano secante Π_3 corta a los ángulos sólidos del tetraedro generador, según triángulos equiláteros de lado $l_3 = x = \overline{DE}$, y en las caras del mencionado tetraedro se formarán exágonos equiángulos DE...FGHID (ángulos de 120°) y de lado alternativamente iguales $\overline{DE} = \overline{FG} = \overline{IH} = x$ y $\overline{EF} = \overline{GH} = \overline{ID} = a_4 - 2x$, siendo los primeros <u>mayores</u> que los segundos (exágonos no equiláteros y por lo tanto <u>no regulares</u>

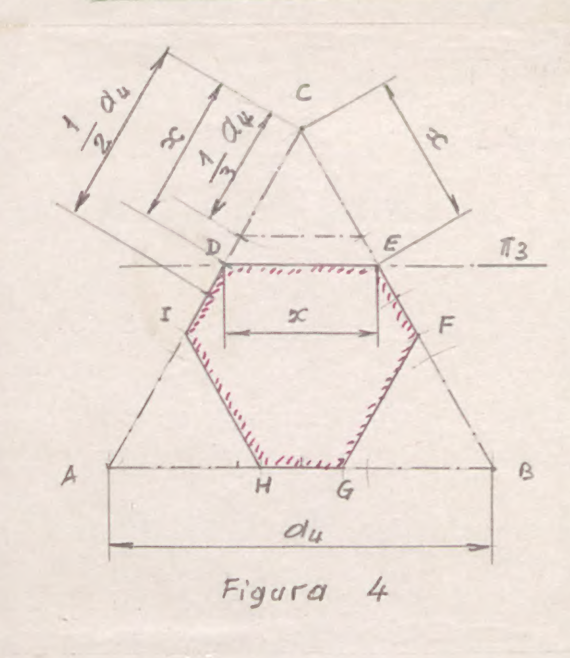
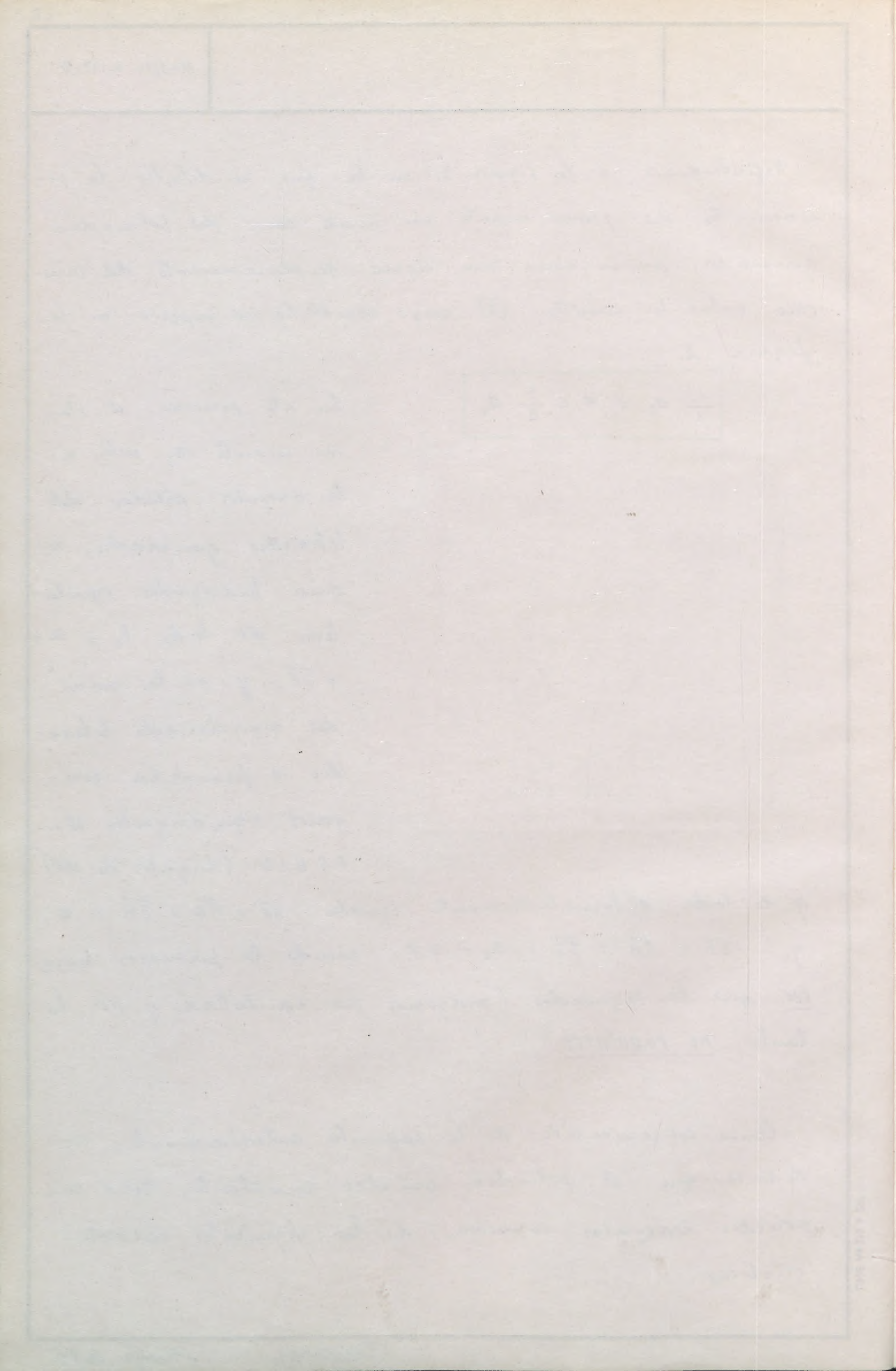


Figura 4

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, se deduce que el poliedro núcleo resultante, será un poliedro irregular convexo, de las siguientes características:



1) Cuatro caras triangulares equiláteras de lado $b_3 = x$, obtenidas sobre el plano secante π_3 en la truncadura de los cuatro ángulos sólidos del tetraedro generador.

2) Cuatro caras exagonales equiángulas DEFGHI (fig. 4) sobre las caras del tetraedro generador, de lados $\overline{DE} = \overline{FG} = \overline{HI} = x$ y $\overline{EF} = \overline{GH} = \overline{ID} = a_4 - 2x$.

3) Número de vértices $V = \dfrac{4 \times 6 + 4 \times 3}{3} = 12$ vértices

4) Número de aristas $A = \dfrac{4 \times 6 + 4 \times 3}{2} = 18$ aristas

---

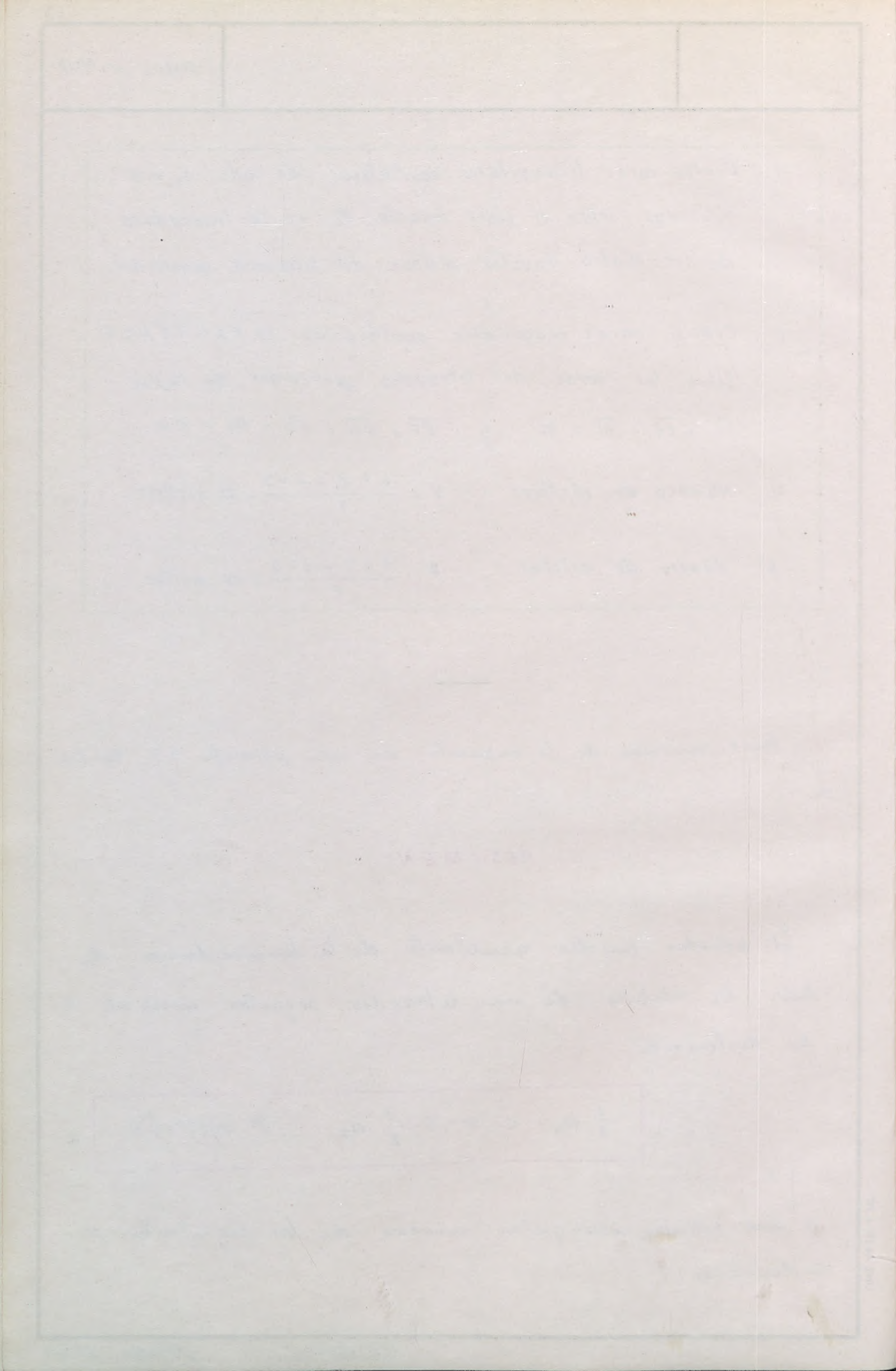
Como resumen de lo expuesto en este párrafo 3.3, tendremos:

RESUMEN

El poliedro núcleo resultante de la truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia

$$\frac{1}{3}\, a_4 < x < \frac{1}{2}\, a_4 \qquad 3^{a} \text{ POSICIÓN}$$

es un poliedro irregular convexo de las siguientes características:



Modelo M-39.4

1) Número de caras triangulares regulares = 4

2) Número de caras exagonales equiángulas = 4

Total caras = 8

3) Número de vértices V = 12

4) Número de aristas A = 18

MODELO DE ESTA TERCERA POSICIÓN

EN PROYECTO

3,4 CUARTA POSICIÓN

POLIEDRO NÚCLEO RESULTANTE DE LA TRUNCADURA DE TODOS LOS VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA

$$x = \frac{1}{2} d_4 \qquad (4)$$

Refiriéndonos a la figura 4, observemos que al alejarse el plano secante Π_3 del vértice C, o sea al aumentar progresivamente la distancia x, se conservan todas las características del poliedro irregular convexo del núcleo, pero al mismo tiempo van aumentando

UNE A4 210 x 297



las longitudes de los lados mayores $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{IH}$ del exágono equiángulo, y disminuyendo las longitudes de sus lados menores $\overline{EF}$, $\overline{HG}$, $\overline{ID}$.

Así pues, existirá una posición tal en que se anulen los lados menores (longitud cero).

Ello ocurrirá cuando el plano secante π_4 (figura 5), pase por los centros de las aristas a_4 a la distancia

$$x = \frac{1}{2} a_4$$

En consecuencia, el plano secante π_4 corta a los ángulos sólidos del tetraedro generador, según triángulos equiláteros de lado $l_3 = x = \frac{1}{2} a_4$, y los exágonos equiángulos DEFGHI formados en las caras (fig. 4) se transformarán en triángulos equiláteros regulares al reducirse a un punto los lados menores $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, $\overline{ID}$, situados sobre las aristas $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ (dichos lados son de longitud cero).

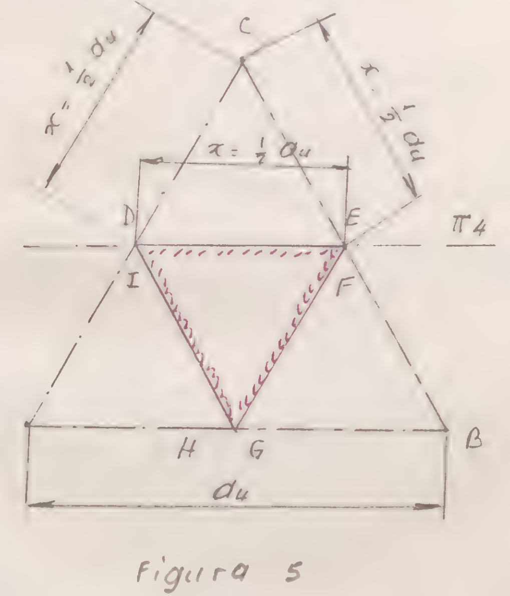


Figura 5

Los triángulos equiláteros de las caras tienen como lado l_3 la magnitud $x = \frac{1}{2} a_4$, y son por tanto iguales a los producidos por el plano secante en los ángulos sólidos.

De esta última propiedad deducimos que el poliedro



núcleo resultante de la truncadura de vértices en esta posición 4ª, es un "OCTAEDRO REGULAR CONVEXO" de arista $a_8 = \frac{1}{2} a_4$

Como resumen de lo expuesto en el párrafo 3.4, tendremos:

RESUMEN

El poliedro núcleo resultante de la truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia

$x = \frac{1}{2} a_4$	4ª POSICIÓN

es: UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO DE ARISTA $a_8 = \frac{1}{2} a_4$

En consecuencia, se deduce la siguiente proposición:

EL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO puede ser engendrado por truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia $x = \frac{1}{2} a_4$, siendo la longitud de su arista $a_8 = \frac{1}{2} a_4$

Esta propiedad ya ha sido puesta de manifiesto en el modelo M - 1.3

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1980



Modelo M-39.7

3.5 QUINTA POSICIÓN

POLIEDRO NÚCLEO RESULTANTE DE LA TRUNCADURA DE TODOS LOS VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA

$$\frac{1}{2} d_4 < x < \frac{3}{5} d_4 \qquad (5)$$

Partiendo de la posición 4ª (figura 5) del plano secante π_4, observaremos que al alejarse el plano secante π_4 del vértice C, dentro de los límites (5), se obtendrán las siguientes secciones en el poliedro generador.

1º) La truncadura del plano secante produce en las caras del tetraedro generador (figura 6) el triángulo equilátero TUV de lado $l_3 = \overline{TU}$

El mismo plano secante π_4 corta a los ángulos sólidos del tetraedro generador, según triángulos equiláteros de lado "x", cuyos vértices quedan truncados, según se representa en la figura 8. a la distancia $\overline{TU} = l_3$.

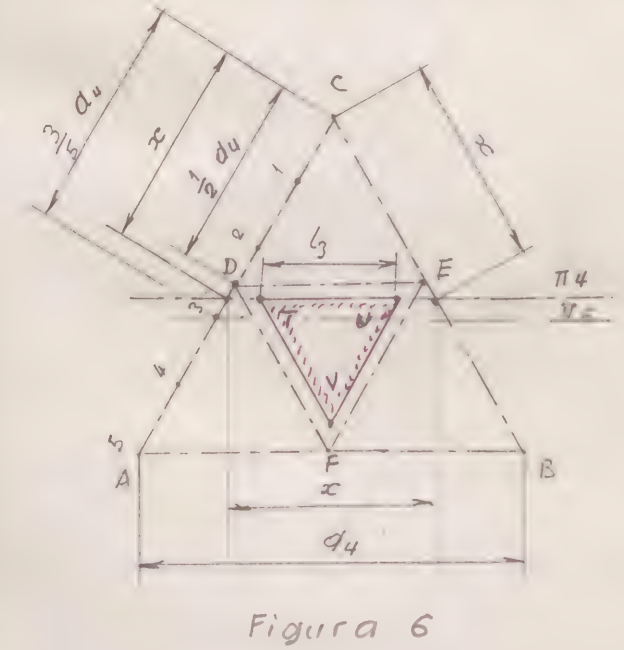


Figura 6

Para determinar la longitud del lado $\overline{TU} = l_3$, consideremos en la figura 8 (ampliada) la cara ABC

UNE A4 210 x 297



Modelo M-39.ª

Figura 7

Sean $\underline{D}$, $\underline{E}$ y $\underline{F}$ los centros de los lados $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{BA}$ respectivamente. Tomemos, a partir de $\underline{A}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ los segmentos $\overline{AL} = \overline{AM} = x$; $\overline{BP} = \overline{BQ} = x$ y $\overline{CR} = \overline{CS} = x$. Uniendo entre sí los puntos L, M, P, Q, R, S, como se indica en la figura

Recordemos que $x > \frac{1}{2} d_4$ sin llegar al valor $x < \frac{3}{5} d_4$ según la condición (5)

De la figura se deducen las relaciones siguientes entre segmentos:

$$\boxed{\overline{SL}} = \overline{AL} - \overline{AS} = \overline{AL} - \left(\overline{AC} - \overline{SC}\right) = x - (d_4 - x) = \boxed{2x - d_4} \qquad (6)$$

y también

$$\boxed{\overline{TU}} = \overline{SR} - \left(ST + \overline{UR}\right) = \overline{SR} - \left(2\,\overline{SL}\right) = x - 2\left(2x - d_4\right) = \boxed{2d_4 - 3x}$$

y siendo $\overline{TU} = l_3$, de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{l_3 = 2d_4 - 3x} \qquad (7)$$

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, deducimos que:

1º La truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia $\frac{1}{2} d_4 < x < \frac{3}{5} d_4$ (condición

UNE A4 210 x 297

Mayo 1980

(5) de la 5ª POSICIÓN), da lugar a la formación, en las cuatro caras del tetraedro generador, de cuatro triángulos equiláteros TUV (figuras 6 y 7) siendo su lado $l_3 = 2a_4 - 3x$ (formula 6)

2º El mismo plano secante Π_4 corta a los ángulos sólidos del tetraedro generador, según triángulos equiláteros de lado "x" (figura 8) cuyos vértices quedan truncados a las distancias $\overline{ST} = \overline{UR} = \overline{SL} = 2x - a_4$ (6), formándose en el plano secante Π_4 cuatro caras exagonales equiángulas, TUMNPQ cuyos lados mayores $\overline{TU}$, $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, son los lados l_3 de los triángulos TUV formados en las caras del tetraedro generador.

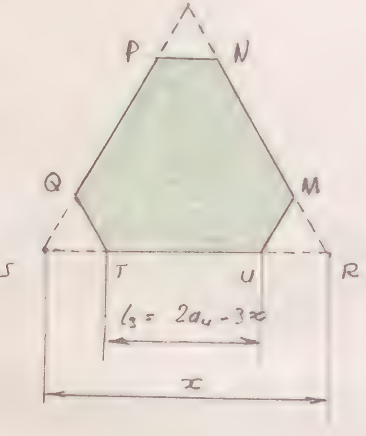


Figura 8

Las caras reseñadas en el párrafo 1º, juntamente con las reseñadas en el párrafo 2º, forman un poliedro irregular convexo, núcleo de la truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, de las siguientes características:

1) Cuatro caras triangulares regulares de lado $l_3 = 2a_4 - 3x$ obtenidas sobre las caras del tetraedro generador.

2) Cuatro caras exagonales equiángulas cuyos lados mayores de longitud $l_3 = 2a_4 - 3x$ son coincidentes con

(continúa en h 10)

UNE A4-210 x 297



los lados de las caras 1)

3) Número de vértices $V = \frac{4 \times 3 + 4 \times 6}{2} = 12$ vértices

4) Número de aristas $A = \frac{4 \times 3 + 4 \times 6}{2} = 18$ aristas

---

Como resumen de lo expuesto en este párrafo 3.5, tendremos:

RESUMEN

El poliedro núcleo resultante de la truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia

$$\frac{1}{2} a_4 < x < \frac{3}{5} a_4 \quad 5^a \text{ POSICIÓN}$$

es un poliedro irregular convexo de las siguientes características, iguales a las de la 3ª POSICIÓN: (ver hoja 4)



1) Número de caras triangulares = 4

2) Número de caras exagonales equiángulas = 4

Total caras = 8

3) Número de vértices V = 12

4) Número de aristas A = 18

MODELO DE ESTA QUINTA POSICIÓN

EN PROYECTO

3.6. SEXTA POSICIÓN

POLIEDRO NÚCLEO RESULTANTE DE LA TRUNCADURA DE TODOS LOS VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA

$$x = \frac{3}{5}\, a_4 \qquad (6)$$

Partiendo de la posición 5ª (figura 6) del plano secante π_4, observemos que al alejarse el plano secante π_4 del vértice C, dentro de los límites (5), se verificará pues:

1º Los lados $l_5 = \overline{TU}$ (fig. 6) de los triángulos equiláte-

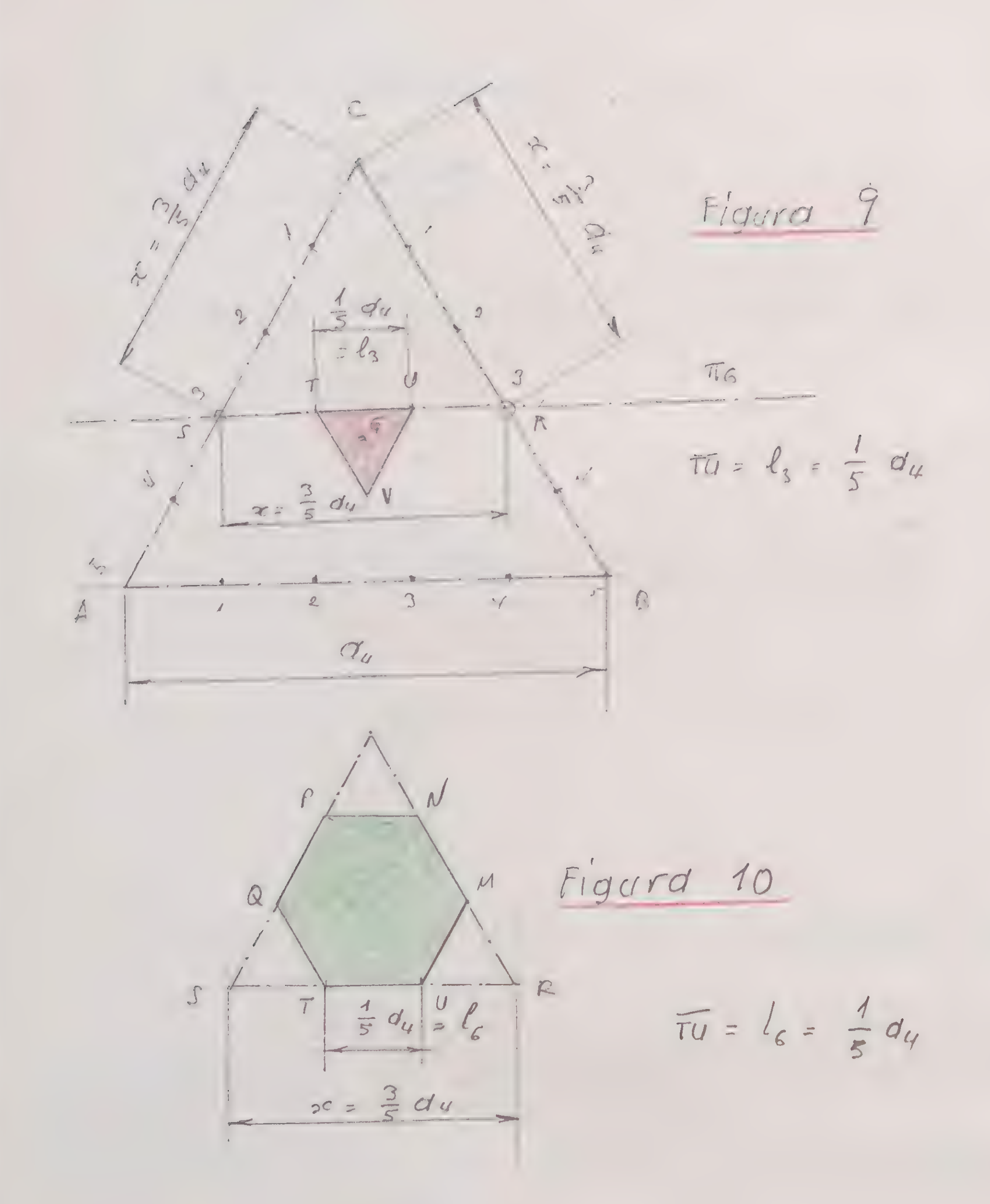


Figura 9
C
$x = \frac{3}{5} d_4$
$\frac{1}{5} d_4$
$= l_3$
T
U
V
S
R
A
B
π_6
$x = \frac{3}{5} d_4$
d_4
$\overline{TU} = l_3 = \frac{1}{5} d_4$
Figura 10
P
N
Q
M
S
T
U
R
$\frac{1}{5} d_4 = l_6$
$x = \frac{3}{5} d_4$
$\overline{TU} = l_6 = \frac{1}{5} d_4$

dos TUV, que se producen en las caras del tetraedro generador, van disminuyendo de longitud.

2º En consecuencia, los lados menores de los exágonos equiángulos de la figura 8, que se producen en el plano secante π_4, van aumentando de longitud.

Por consiguiente, el plano secante tomará una posición tal (figuras 9 y 10) en el que el exágono equiángulo de la fig 8 sea un exágono regular. Ello ocurrirá cuando el lado $l_3 = \overline{TU}$ (fig. 8) sea $\frac{1}{3}\overline{SR} = \frac{1}{3}x$ (ver estudio de la 2ª POSICIÓN para $x = \frac{1}{3}a_4$).

Sustituyendo en (7) el valor de $l_3 = \frac{1}{3}x$, tendremos

$\frac{1}{3}x = 2a_4 - 3x$ y de aquí: $3x + \frac{1}{3}x = 2a_4$;

$\frac{10}{3}x = 2a_4$; $\boxed{x} = 2a_4 : \frac{10}{3} = \frac{6}{10}a_4 = \boxed{\frac{3}{5}a_4}$

de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{x = \frac{3}{5}a_4} \qquad (8)$$

La ecuación (8) nos demuestra que:

"La truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia $x = \frac{3}{5}a_4$, produce en los planos secan-



tes cuatro exágonos regulares convexos, y en las caras del tetraedro generador cuatro triángulos equiláteros, todos de lados iguales.

El poliedro núcleo resultante, después de efectuada dicha truncadura, tendrá pues las siguientes características:

1)	Número de caras triangulares regulares	= 4
2)	Número de caras exagonales regulares convexas	= 4
	Total caras	= 8
3)	Número de vértices	V = 12
4)	Número de aristas	A = 18

éstas son las características del poliedro semi-regular "ARQUIMEDIANO VII", estudiado en el ejercicio. G.E. nº...-Lám 39

La longitud de la arista de este arquimediano, en el que $a_{VII} = l_3$ (fig. 7 y 8), se obtiene sustituyendo en la ecuación (7), el valor de x de la ecuación (8).

Así pues, tendremos

$$\boxed{a_{VII}} = 2a_4 - 3x = 2a_4 - 3 \times \frac{3}{5}a_4 = 2a_4 - \frac{9}{5}a_4 = \left(2 - \frac{9}{5}\right)a_4 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{5}a_4}$$ de donde se obtiene finalmente:



Modelo M - 39.7

$$a_{VII} = \frac{1}{5} a_4 \qquad (9)$$

La fórmula (9) nos demuestra que la longitud de la arista a_{VII} de este ARQUIMEDIANO VII, en la posición 6ª ($x = \frac{3}{5} a_4$), del plano secante en la truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, tiene por longitud un quinto de la longitud de la arista del tetraedro generador.

Así pues, podemos establecer la siguiente proposición:

" El ARQUIMEDIANO VII puede ser engendrado por la "
" truncadura de vértices de un tetraedro regular conve- "
" xo a la distancia $x = \frac{3}{5} a_4$, siendo la longitud de "
" la arista $a_{VII} = \frac{1}{5} a_4$ "

Como resumen de lo expuesto en este párrafo 3.6. (6ª posición), tendremos:

RESUMEN

El poliedro núcleo resultante de la truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia

$$x = \frac{3}{5} a_4 \quad 6^a \text{ POSICIÓN} \qquad (6)$$

UNE A4 210 x 297

Mayo 1980



es el poliedro semi-regular "ARQUIMEDIANO VII" cuya arista a_{VII} es $\frac{1}{5} a_4$, siendo a_4 la arista del tetraedro generador.

Los conceptos establecidos en el párrafo 3.6, y resumidos a su final, nos permiten la construcción del modelo M-39.7 que a continuación estudiamos.

UNE A4 210 x 297



MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO VII", OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_4", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA $\frac{3}{5} a_4$.- EL ARQUIMEDIANO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador:

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297



ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO VII" obtenido por truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, de arista "a_4", a la distancia $x = \frac{3}{5} a_4$. - El arquimediano generado se construirá con las caras macizas, y el tetraedro regular convexo generador con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r^4_{ec} = radio de la esfera circunscrita al tetraedro regular generador.

$$r^4_{e_c} = 110 \text{ mm}$$

El ESTUDIO PREVIO sobre el proceso de TRUNCADURA DE VÉRTICES del tetraedro regular convexo, iniciado en el modelo M-39.1, y continuado en los modelos M-39.5 y en el actual M-39.7, llegamos, en el desarrollo del párrafo 3.6 de este último, en el que estudiamos la POSICIÓN 6ª, cuando es $x = \frac{3}{5} a_4$, a la siguiente conclusión:

" EL ARQUIMEDIANO VII puede ser engendrado por la truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia $x = \frac{3}{5} a_4$, siendo la longitud de su



"arista la de $a_{VII} = \frac{1}{5} a_4$"

El enunciado anterior nos permite la construcción del modelo M-39.7 que estudiamos, cuyo enunciado explícito se incluye al comienzo de este estudio.

Como en esta construcción, el Arquimediano VII, ha de realizarse con las caras macizas, y el tetraedro generador, con sus caras vaciadas, a fin de poder situar en su posición correcta este último, construiremos sobre las cuatro caras exagonales del Arquimediano, otras tantas pirámides rectas regulares, auxiliares, de caras vaciadas, cuyos vértices servirán de apoyo a los cuatro del tetraedro generador. Previamente efectuaremos los cálculos de longitudes siguientes:

1) Arista "a_{VII}" del Arquimediano VII engendrado

Su valor es, en función de la arista a_4 del tetraedro generador:

$$a_{VII} = \frac{1}{5} a_4 \qquad (1)$$

El valor de a_4 en función del radio r_{ec}^4 de la esfera circunscrita al tetraedro generador (dato del ejercicio), se obtiene de la fórmula deducida en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 1)

$$r_{ec}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4$$

en la que despejando a_4, tendremos:

UNE A4 210 x 297



Modelo M-39.7

$$\boxed{a_4} = r_{ec}^{4} : \frac{\sqrt{6}}{4} = r_{ec}^{4} \times \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} r_{ec}^{4} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{4}} \qquad (2)$$

valor que sustituido en (1), nos dará:

$$\boxed{a_{VII}} = \frac{1}{5} a_4 = \frac{1}{5} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{4} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{15} r_{ec}^{4}} \qquad (3)$$

Para el caso particular de este modelo, tendremos:

$$\boxed{a_{VII}} = \frac{2\sqrt{6}}{15} r_{ec}^{4} = 0.32\ 65\ 98\ 63\ 2 \ldots \times 110 = \boxed{35,9 \text{ mm}}$$

2) Arista lateral "a_6" de la pirámide recta exagonal, auxiliar

La altura "h_6" de dicha pirámide, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{4}" de la esfera circunscrita al tetraedro regular generador, y del radio "r_{ei}^{VII-6}" de la esfera inscrita tangente a las caras exagonales del Arquimediano generado. Así pues tendremos:

$$\boxed{h_6 = r_{ec}^{4} - r_{ei}^{VII-6}} \qquad (4)$$

El radio r_{ec}^{4} se obtuvo en el ejercicio G. E. nº....- Lámina 1, en función de la arista a_4 del tetraedro generador. Su valor es:

$$\boxed{r_{ec}^{4} = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4} \qquad (5')$$

UNE A4 210 x 297

El radio "r_{ei}^{VII-6}" de la esfera tangente a las caras exagonales del Arquimediano VII, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº... Lámina 39. Su valor, en función de la arista "a_{VII}" de dicho Arquimediano, es:

$$r_{ei}^{VII-6} = \frac{\sqrt{6}}{4} a_{VII} \qquad (6)$$

y sustituyendo a_{VII} por su valor $a_{VII} = \frac{1}{5} a_4$ (ver fórm. 4) tendremos:

$$r_{ei}^{VII-6} = \frac{\sqrt{6}}{4} a_{VII} = \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{1}{5} a_4 = \frac{\sqrt{6}}{20} a_4 \qquad (7)$$

Sustituyendo en (4) los valores (6) y (7) tendremos:

$$h_6 = r_{ec}^{4} - r_{ei}^{VII-6} = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4 - \frac{\sqrt{6}}{20} a_4 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{20}\right) a_4 =$$

$$= \frac{5\sqrt{6} - \sqrt{6}}{20} a_4 = \frac{\sqrt{6}}{5} a_4 \qquad (8)$$

y finalmente, sustituyendo en (8) el valor de a_4 obtenido en (2), tendremos finalmente:

$$h_6 = \frac{\sqrt{6}}{5} a_4 = \frac{\sqrt{6}}{5} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{4} = \frac{12}{15} r_{ec}^{4} = \frac{4}{5} r_{ec}^{4} \qquad (9)$$

Para obtener la longitud de la arista "a_6" de las caras laterales de las pirámides exagonales, tendremos en cuenta que "a_6" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, de catetos

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1980



$h_6 = r_{ec}^6$, y otro igual al radio de la circunferencia circircunscrita a la cara exagonal del Arquimediano VII, cuyo radio es igual a la arista "a_{VII}" del mismo.

Por consiguiente, tendremos:

$$a_6 = \sqrt{(h_6)^2 + (a_{VII})^2} \qquad (10)$$

Sustituyendo en (16) el valor de $h_6 = \frac{4}{5} r_{ec}^4$ (ver fórm. 15), y $a_{VII} = \frac{1}{5} a_4$ (ver fórm. 7), y después a_4 por $\frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4$ (ver fórm. 8), tendremos:

$$\boxed{a_6} = \sqrt{\left(\frac{4}{5} r_{ec}^4\right)^2 + \left(\frac{1}{5} a_4\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5} r_{ec}^4\right)^2 + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times r_{ec}^4\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}\right)^2} \times r_{ec}^4 = \sqrt{\frac{16}{5^2} + \frac{24}{15^2}}\, r_{ec}^4 = \sqrt{\frac{16 \times 3^2 + 24}{15^2}}\, r_{ec}^4 =$$

$$= \sqrt{\frac{144 + 24}{15^2}}\, r_{ec}^4 = \sqrt{\frac{168}{15^2}}\, r_{ec}^4 = \sqrt{\frac{2^2 \times 42}{15^2}}\, r_{ec}^4 = \boxed{\frac{2\sqrt{42}}{15}\, r_{ec}^4} \qquad (11)$$

Para el caso particular de este modelo, tendremos:

$$\boxed{a_6} = \frac{2\sqrt{42}}{15} \times 110 \cong 0.86\,40\,98\,76\,0 \ldots \times 110 \cong \boxed{95 \text{ mm}}$$

Con las medidas calculadas de $a_{VII} = 35.9$ mm y $a_6 = 95$ mm, vamos a desarrollar seguidamente la construcción del modelo estudiado, para el cual son necesarias las siguientes piezas:

UNE A4 210 x 297

Calvarro Mayo 1980

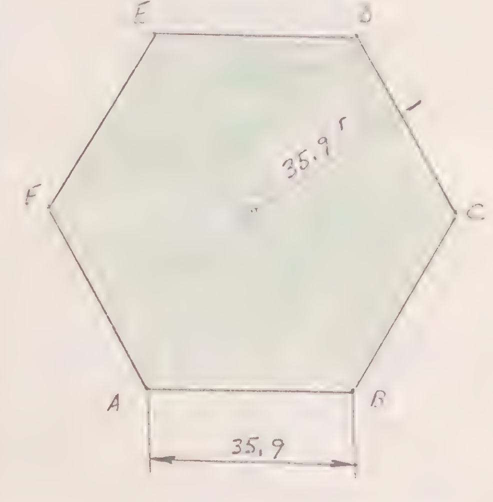


Modelo M-19-7

A) ARQUIMEDIANO VII DE CARAS MACIZAS, DEL NÚCLEO, DESPUES DE LA TRUNCADURA DE VÉRTICES

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES.- 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3



PIEZA Nº 1 4 (u)

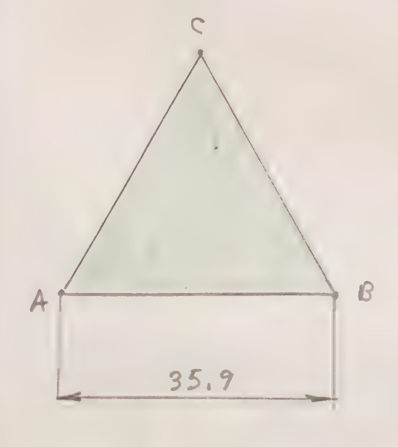
Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES

4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4



PIEZA Nº 2 4 (U)

Figura 4

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Calvario Mayo 1980



PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES

4 unidades

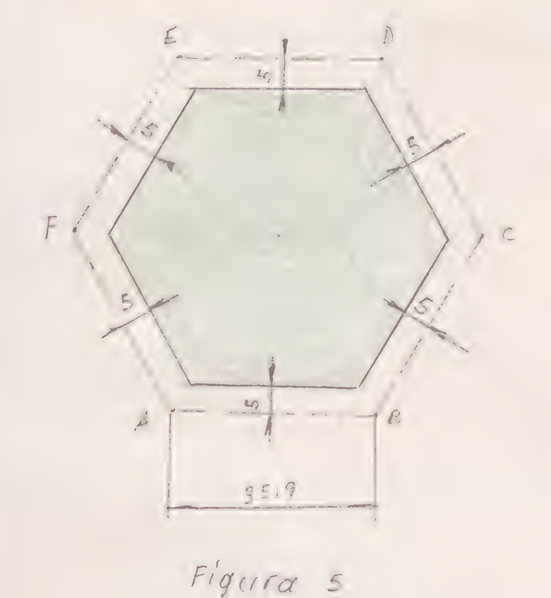


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono A.B.C.D.E.F de la figura 3, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 3 4 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES

4 unidades

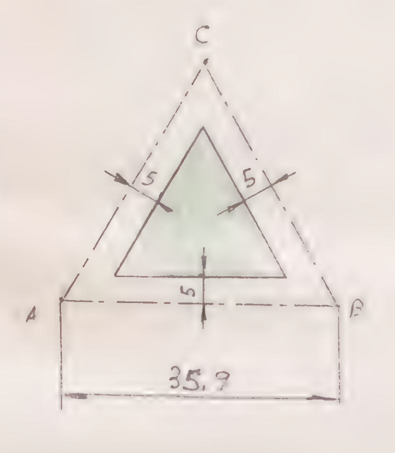


Figura 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 4, y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 4 4 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS EXAGONALES CONTIGUAS

6 unidades

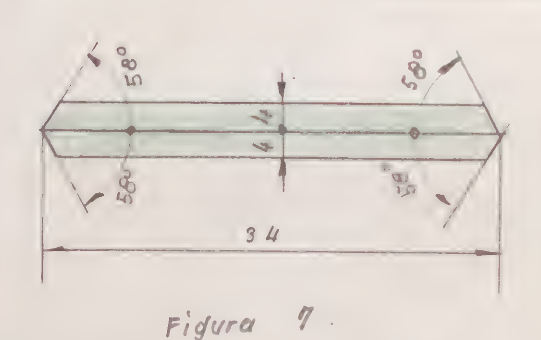


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

PIEZA Nº 5 6 (u)

Figura 7



PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA EXAGONAL Y OTRA TRIANGULAR 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 6 6 (u)

Figura 8

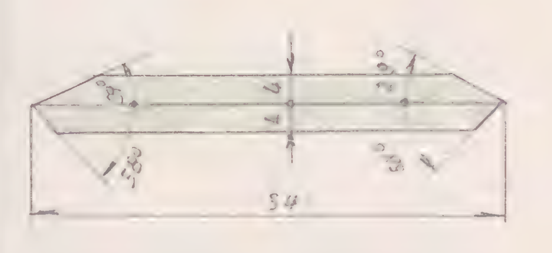


Figura 8

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES

4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 3, y se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 7 4 (u)

Figura 9

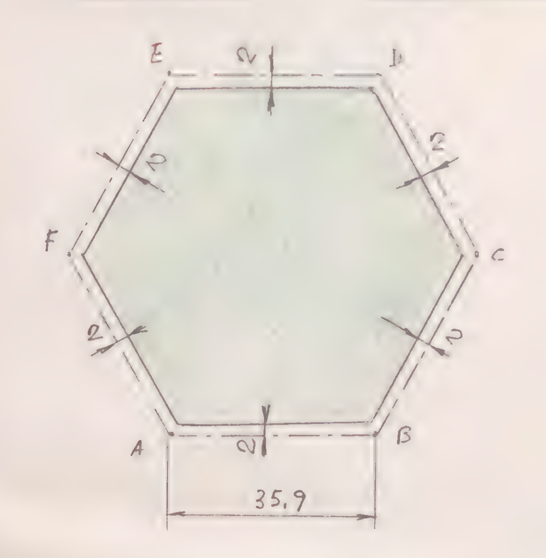


Figura 9

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 4, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 8 4 (u)

Figura 10

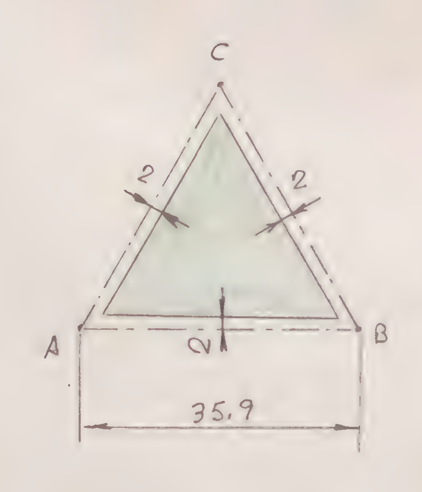


Figura 10



B) PIRÁMIDES EXAGONALES DE CARAS VACIADAS PARA FIJACIÓN DEL TETRAEDRO GENERADOR

PIEZA Nº 9 DESARROLLO LATERAL 4 unidades

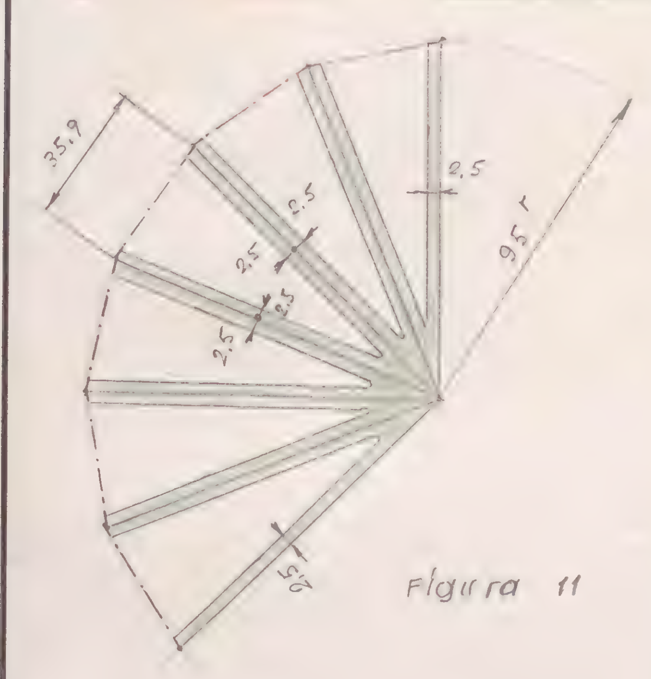


Figura 11

PIEZA Nº 9 4 (u)

Figura 11

PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS 24 unidades

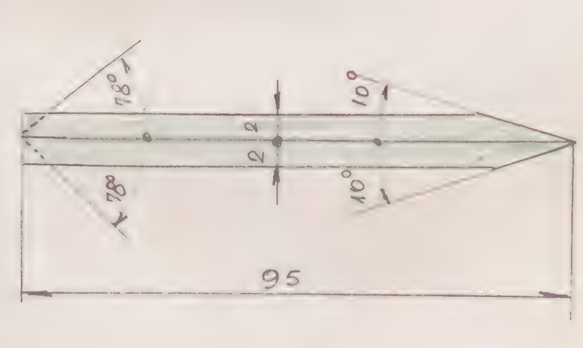


Figura 12

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

PIEZA Nº 10 24 (u)

C) TETRAEDRO GENERADOR REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 11 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

UNE A4 210 x 297



Modelo M-1.97

Igual a la pieza nº 2 del modelo M-1.102

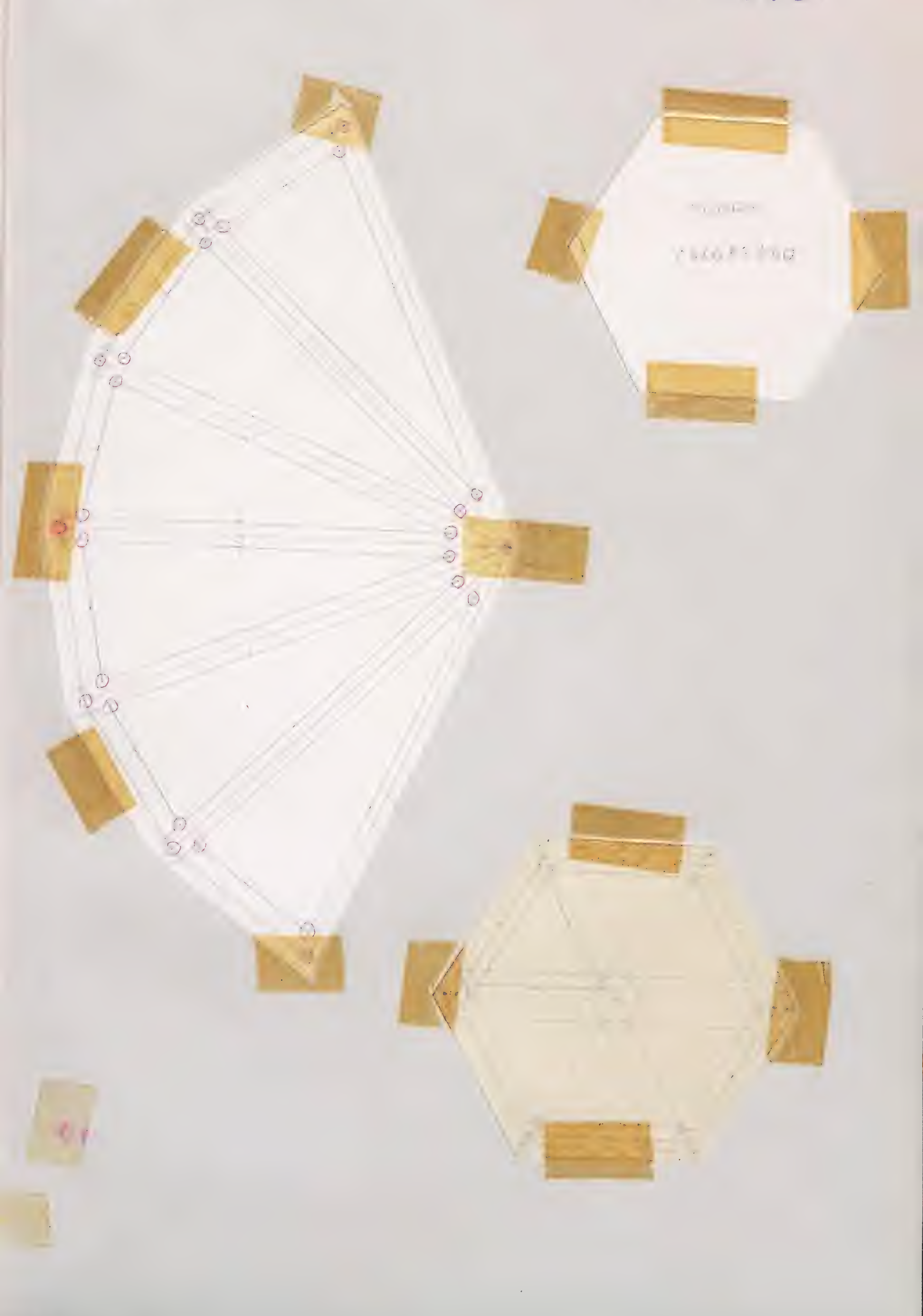
PIEZA Nº 12 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M-1.102.

UNE A4 210 x 297



MODELO M-39.7 PATRONES



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO VIII", FORMADO POR OCHO CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3), Y SEIS CARAS OCTOGONALES REGULARES CONVEXAS (C_8), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1 C_3 + 2 C_8$.

Radio de la esfera circunscrita

$r' = 110$ m m.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 40.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas, "ARQUIMEDIANO VIII", formado por ocho caras triangulares regulares (C_3) y seis caras octogonales regulares convexas (C_8), concurriendo en cada vértice $1\ C_3 + 2\ C_8$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G.E. nº ..... Lámina 40, y representado en sus vistas principal, superior y lateral izquierda en la mencionada Lámina 40, a escala 1:1, con el radio r_{ec}^{VIII} de su esfera circunscrita de $r_{ec}^{VIII} = 55$ mm.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{VIII} = 110 \text{ mm}$$

Las características geométricas del ARQUIMEDIANO VIII, son las siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$
Número de caras octogonales	$C_8 = 6$
Número de vértices	$V = 24$
Número de aristas	$A = 36$
Número de caras de un ángulo sólido:	$1\ C_3 + 2\ C_8$

UNE A4 210 x 297

T. Álvarez   Mayo 1980



Para poder obtener el despiezo de este poliedro, calculemos previamente la longitud a^{VIII} de la arista del mismo, en función del radio r_{ec}^{VIII} de su esfera circunscrita. Para ello utilizaremos la fórmula

$$r_{ec}^{VIII} = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2} a_{VIII} \qquad (1)$$

deducida en el mencionado ejercicio G.E. n°....- Lámina 40 que nos da el valor del radio r_{ec}^{VIII} en función de a_{VIII}. Despejando en (1) a_{VIII}, tendremos:

$$\boxed{a_{VIII}} = \left[1 : \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2} \right] r_{ec}^{VIII} = \frac{2}{\sqrt{7+4\sqrt{2}}} \times r_{ec}^{VIII} = 2 \times \sqrt{\frac{1}{7+4\sqrt{2}}} \, r_{ec}^{VIII}$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{7-4\sqrt{2}}{49-32}} \, r_{ec}^{VIII} = \boxed{2 \times \sqrt{\frac{7-4\sqrt{2}}{17}} \, r_{ec}^{VIII}}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$a_{VIII} = 2 \times \sqrt{\frac{7-4\sqrt{2}}{17}} \, r_{ec}^{VIII} \qquad (2)$$

Fórmula que aplicada al caso estudiado nos da

$$\boxed{a_{VIII}} = 2 \times \sqrt{\frac{7-4\sqrt{2}}{17}} \, r_{ec}^{VIII} \simeq 0,56\ 21\ 69\ 27\ 6\ldots \times 110 = \boxed{61,8 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este poliedro, son necesarias las siguientes piezas:

UNE A4·210 x 297



PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES : 8 unidades

Son triángulos equiláteros, cuya forma y dimensiones se detallan en la figura 1

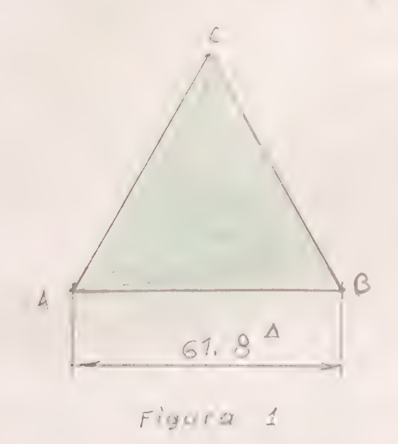


Figura 1

PIEZA Nº 1 8 (u)

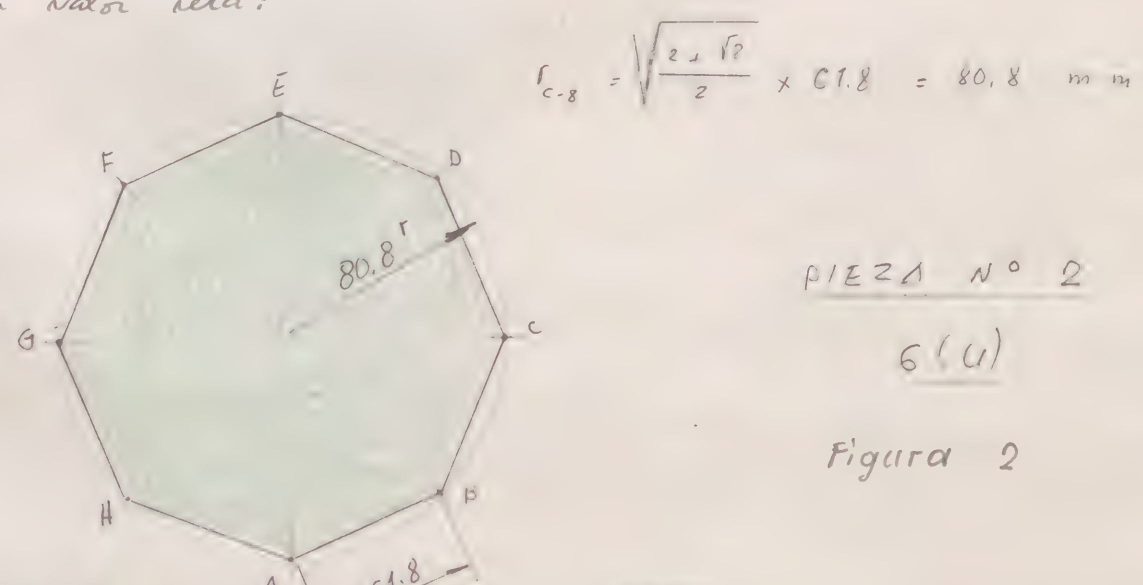
Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES OCTOGONALES 6 unidades

Son octógonos regulares convexos de lado $l_8 = a_{VIII} = 61.8$ mm Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2.

Para dibujar más fácilmente el octógono, calcularemos previamente el radio r_{c-8} de su circunferencia circunscrita, por la fórmula $r_{c8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\, l_8$, obtenida en G.P. 1.400-46; su valor será:

$$r_{c-8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \times 61.8 = 80.8 \text{ mm}$$



PIEZA Nº 2

6 (u)

Figura 2

Figura 2



PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES TRIANGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3

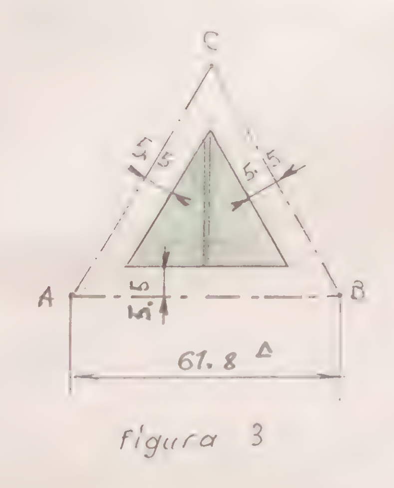


Figura 3

PIEZA Nº 3 8 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES OCTOGONALES 6 unidades

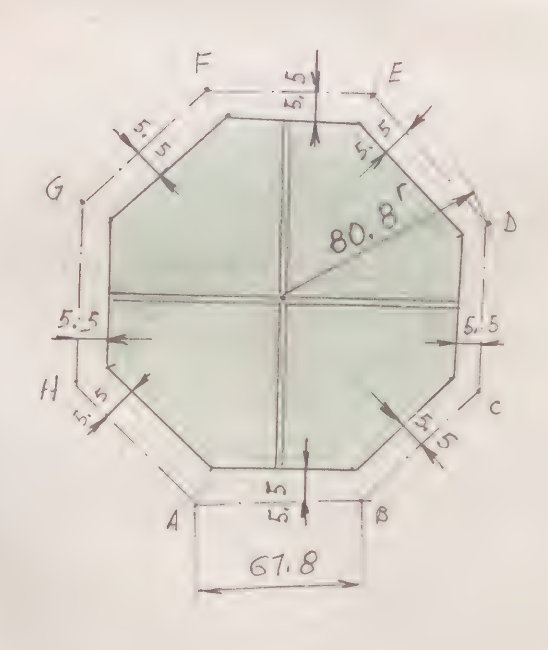


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono regular convexo A, B... G, H, de la figura 2, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4

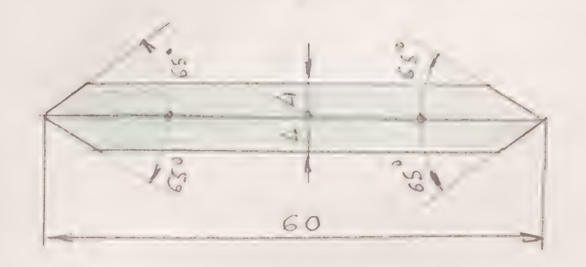
6 (u)

Figura 4



PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS OCTOGONALES CONTIGUAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5



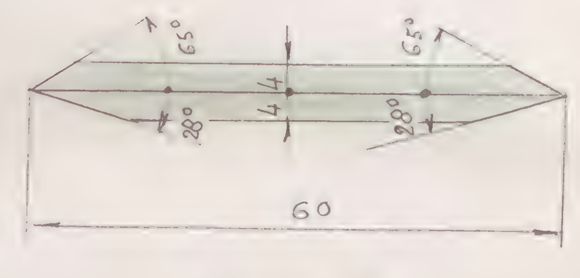
PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS EN UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA OCTOGONAL CONTIGUAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6.

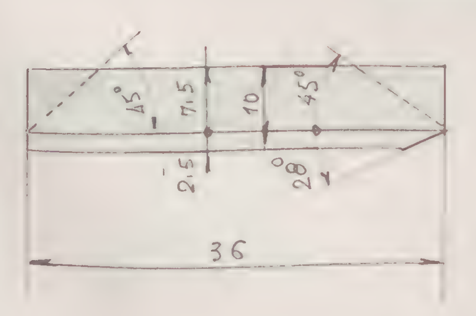


PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 16 unidades (simétricas dos a dos)



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 3

PIEZA Nº 7 16 (u)

Figura 7

Figura 7



Modelo M-401

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS OCTOGONALES 24 unidades

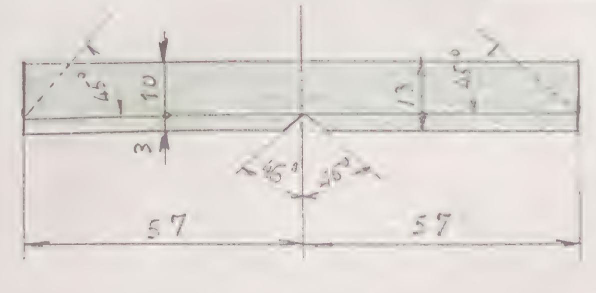


Figura 8

La forma y dimensiones se detallan en la figura 8: su colocación en la figura 4.

PIEZA Nº 8 24 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS OCTOGONALES 6 unidades

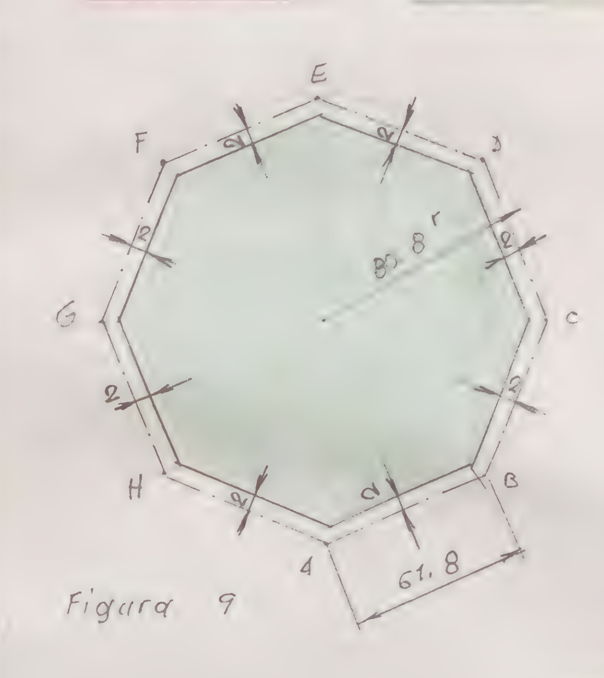


Figura 9

La forma y dimensiones se detallan en la figura 9, y se deducen de las del octógono A, B...G, H, de la figura 2

PIEZA Nº9 6 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES 8 unidades

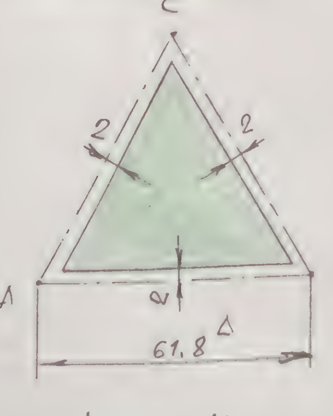


Figura 10

La forma y dimensiones se detallan en la figura 9, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1.

PIEZA Nº 10 8 (u)

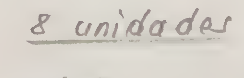


Figura 10

UNE A4 210 x 297

Calvarez Mayo 1980

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS, "ARQUIMEDIANO VIII", FORMADO POR OCHO CARAS TRIANGULARES, REGULARES (C_3), Y SEIS CARAS OCTOGONALES, REGULARES CONVEXAS (C_8), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1\,C_3 + 2\,C_8$.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm



ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas, ARQUIMEDIANO VIII, formado por ocho caras triangulares regulares (C_3), y seis caras octogonales regulares convexas (C_8), concurriendo en cada vértice $1\,C_3 + 2\,C_8$.

Este modelo, puede considerarse como una variante del M-40.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M-40.1.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{VIII} = radio de la esfera circunscrita:

$$r_{e_c}^{VIII} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este poliedro, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES, REGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.





Figura 1

PIEZA Nº 1

8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES OCTOGONALES, REGULARES CONVEXAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

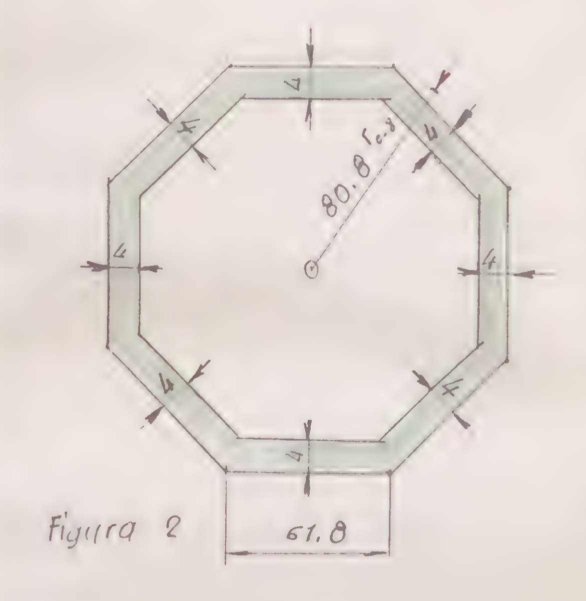


Figura 2

PIEZA Nº 2

6 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS OCTOGONALES CONTIGUAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

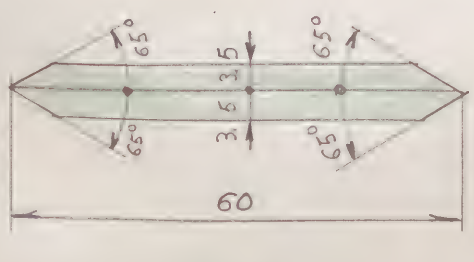


Figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

Talvarez Mayo 1980



		Modelo M-402

PIEZA Nº 4   UNIONES ARISTAS EN UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA OCTOGONAL CONTIGUAS   24 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 4

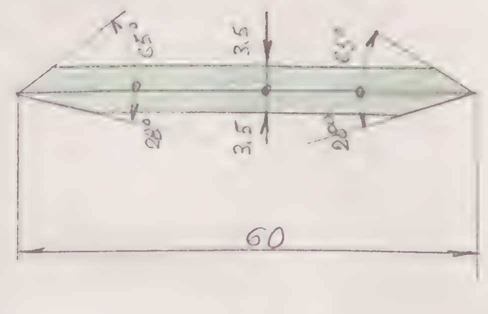


Figura 4

PIEZA Nº 4

24 (u)

Figura 4

MODELOS CORPÓREOS | Modelo M- 40,3

VARIANTE DEL MODELO M-40.1, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO VIII", formado por ocho caras triangulares regulares (C_3) y seis caras octogonales, regulares, convexas (C_8), concurriendo en cada vértice $1 C_3 + 2 C_8$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-40.1, de igual forma, pero siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec} = 76.1$ mm).

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M-40.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción, $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas:

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$\overset{\overline{VIII}}{r_{ec}} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\overline{18}$$



Modelo M-40.3

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-40.1. y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-40.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1 8 (u)	61.8	42.8

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES OCTOGONALES REGULARES 6 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2 6 (u)	61.8 80.8	42.8 55.9

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES TRIANGULARES 8 unidades

UNE A4 210 x 297

Mayo 1980



La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3 8 (u)	61.8	42.8
	5.5	5

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES OCTOGONALES 6 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4 6 (u)	61.8	42.8
	80.8	55.9
	5.5	5

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS OCTOGONALES CONTIGUAS 12 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:



FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	60	41
12 (u)	4	4
	65°	65°

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS EN UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA OCTOGONAL CONTIGUAS 24 unidades

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	60	41
24 (u)	4	4
	28°	28°
	65°	65°

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 16 unidades

Debido al pequeño tamaño de estas caras no es necesario su refuerzo transversal, por lo que se suprime.

UNE A4 210 x 297

Calvarez Mayo 1980



Modelo M-10.3

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS OCTOGONALES 24 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm.
PIEZA Nº 8	57	47
24 (u)	13	10
	10	7.5
	3	2.5
	46°	46°

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS OCTOGONALES 6 unidades

La figura 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 9	61.8	42.8
6 (u)	80.8	55.9
	2	2

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES 8 (u)

La figura 10, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 10	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 10	61.8	42.8
8(u)	2	2

UNE A4 210 x 297

Calvario Mayo 1980



VARIANTE DEL MODELO M - 40.2, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-40.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO VIII", formado por ocho caras triangulares regulares (C_3), y seis caras octogonales, regulares y convexas (C_8), concurriendo en cada vértice - $1 C_3 + 2 C_8$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M - 40.2, de igual forma, siendo de menor tamaño el radio de su esfera circunscrita (r_{ec} = 76.1 mm).

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M- 40.2 en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES, REGULARES 8 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1	61.8	42.8
8 (u)	4	3

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1980



		Modelo M-40.4

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES OCTOGONALES, REGULARES Y CONVEXAS 6 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm.
PIEZA Nº 2	61.8	42.8
6 (u)	80.8	55.9
	4	3

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS OCTOGONALES CONTIGUAS 12 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3	60	41
6 (u)	3.5	2.5
	65°	65°

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA CARA OCTOGONAL CONTIGUAS.- 24 (u)

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1980



La figura 4 ha de construirse con las siguientes cotas (modificadas):

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	60	41
24 (4)	3.5	2.5
	28°	28°
	65°	65°

UNE A4 210 x 297

[illegible] Mayo 1980



MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO VIII" OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_6", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA $\frac{2-\sqrt{2}}{2} a_6$.- EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL EXAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS

Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador

$$r_{ec}^{6} = 110 \text{ mm}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO VIII" obtenido por truncadura de vértices de un exaedro regular convexo, de arista "a_6", a la distancia $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} a_6$.- El Arquimediano generado se construirá con las caras macizas, y el exaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{6} = radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$$r_{ec}^{6} = 110 \ mm$$

1. CONSIDERACIONES PREVIAS

En el ESTUDIO PREVIO a la construcción de los poliedros Arquimedianos, iniciado el ejercicio M-39.1; continuado en los M-39.5; M-39.7; y terminado en el M-6.2, hemos estudiado profundamente el proceso geométrico denominado de TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, por el que se obtienen muchos de los POLIEDROS ARQUIMEDIANOS y también los propios poliedros regulares convexos.

Dicho proceso fué aplicado en el mencionado ESTUDIO

UNE A4 210 x 297



PREVIO al conocimiento de la forma y propiedades geométricas del poliedro convexo resultante de la aplicación del mencionado proceso de TRUNCADURA DE VÉRTICES al caso particular del TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, tomado como primer poliedro generador entre los cinco poliedros regulares convexos.

Las diversas posiciones del plano secante dan lugar a la obtención de un poliedro núcleo de muy variadas formas, dependientes de la posición del plano secante con respecto al tetraedro generador, y fueron resumidas al final del mencionado estudio previo, que a continuación volvemos a exponer.

Estas posiciones están dadas en función de la distancia "x" que sitúa al plano secante con respecto al poliedro generador. Dicho plano es el que pasa por puntos tomados a la distancia "x" sobre las aristas que concurren en cada vértice del tetraedro generador, y a partir de dicho vértice. Las posiciones estudiadas, son las siguientes:

1ª POSICIÓN	$0 < x < \frac{1}{3} a_4$	(M-39.5)	(1)
2ª POSICIÓN	$x = \frac{1}{3} a_4$	(M-39.5)	(2)
3ª POSICIÓN	$\frac{1}{3} a_4 < x < \frac{1}{2} a_4$	(M-39.7)	(3)

UNE A4 210 x 297

Junio 1980



4ª POSICIÓN $x = \frac{1}{2} d_4$ (M-39.7) (4)

5ª POSICIÓN $\frac{1}{2} d_4 < x < \frac{3}{5} d_4$ (M-39.7) (5)

6ª POSICIÓN $x = \frac{3}{5} d_4$ (M-39.7) (6)

7ª POSICIÓN $\frac{3}{5} d_4 < x < \frac{2}{3} d_4$ (M-6.2) (7)

8ª POSICIÓN $x = \frac{2}{3} d_4$ (M-6.2) (8)

9ª POSICIÓN $\frac{2}{3} d_4 < x \leqq d_4$ (M-6.2) (9)

Con el fin de generalizar a los cuatro poliedros P_n ($n = 6, 8, 12, 20$) regulares convexos (exaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), los resultados obtenidos en el tetraedro, vamos a elegir entre las nueve posiciones del plano secante, aquellas soluciones en las que la truncadura de vértices del tetraedro regular convexo, dan lugar a la formación de un poliedro nucleo que sea un poliedro Arquimediano, o un poliedro regular convexo, que son las de especial interés, y poder aplicar estos resultados a su vez a los cuatro poliedros regulares restantes P_n ($n = 6, 8, 12$ y 20).

En efecto, en la 2ª POSICIÓN $x = \frac{1}{3} d_a$, estudiada



en el modelo M-39.5, el poliedro núcleo demostramos era un "ARQUIMEDIANO VII" obtenido por la truncadura de vértices del tetraedro regular convexo a la distancia $x = \frac{1}{3} a_4$. El valor de "x" se obtiene por la condición geométrica de que el plano secante produzca:

a) En las caras del poliedro generador, polígonos regulares de doble número de lados que los de las mencionadas caras, cuyos lados son alternativamente coincidentes con los de las mismas y cuyo número será, por consiguiente, el de caras del mencionado poliedro generador.

b) En los ángulos sólidos de los vértices, del poliedro generador, se producen, por el plano secante de la truncadura, triángulos regulares de igual lado que los de los polígonos a), y cuyo número será, por lo tanto, igual al de vértices de dicho poliedro generador.

Las condiciones a) y b) pueden servirnos para poder determinar previamente: 1º Las características geométricas del poliedro engendrado; y 2º La posición del plano secante, función de la magnitud "x", que satisface la condición a).

Aplicando estos conceptos nuevamente al caso planteado en

UNE A4 210 x 297

Calvarez Junio 1980



la 2ª POSICIÓN, ya resuelto en el modelo M-39.5, en el que el poliedro generador es un tetraedro regular convexo, y el poliedro convexo del núcleo, resultante de la truncadura de sus vértices, podemos deducir previamente que tendría:

1) Por cumplir la condición a) cuatro caras exagonales regulares convexas, y

2) Por cumplir la condición b), cuatro caras triangulares regulares, y además tendría:

$\frac{4 \times 6 + 4 \times 3}{3} = 12$ vértices; y $\frac{4 \times 6 + 4 \times 3}{2} = 18$ aristas.

Siendo el número de caras de un ángulo sólido = $= 1C_3 + 2C_6$.

Finalmente, para obtener en un triángulo equilátero, un exágono regular convexo de lados alternativos coincidentes con los de los mencionados triángulos, bastará truncar los vértices de éstos, a las distancias $x = \frac{1}{3} a_4$ (La demostración geométrica de esta propiedad, es inmediata).

En consecuencia, y a la vista de los resultados anteriores, deducimos que el poliedro núcleo convexo, resultante de la truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia $x = \frac{1}{3} a_4$, es un **ARQUIMEDIANO VII de arista $a_{VII} = \frac{1}{3} a_4$.**

UNE A4 210 x 297

[illegible] Junio 1980



		Modelo 11-40.5

2. DETERMINACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DEL POLIEDRO ESTUDIADO.

Teniendo presente los conceptos expresados en las "consideraciones previas" del párrafo 1)., podemos deducir de antemano, que el poliedro convexo núcleo, resultante de la truncadura de vértices de un exaedro regular convexo, a la distancia "x" tal, que el plano secante en la POSICION 2ª, produzca en el exaedro generado:

1º) En las caras del mismo, seis octógonos regulares C_8 (por cumplir la condición a)); y

2º) En el plano secante, ocho triángulos regulares C_3 de igual lado que los anteriores (por cumplir la condición b)).

Por consiguiente, el poliedro resultante tendrá las siguientes características geométricas:

1) Número de caras octogonales regulares = $6\ C_8$

2) Número de caras triangulares regulares = $8\ C_3$

3) Número de vértices = $\dfrac{6 \times 8 + 8 \times 3}{3}$ = 24 vértices

4) Número de aristas = $\dfrac{6 \times 8 + 8 \times 3}{2}$ = 36 aristas

5) Número de caras en cada vértice = $1\ C_3 + 2\ C_8$

UNE A4 210 x 297

CAlvarez Junio 1980



Modelo M-40.5

Estas características son las mismas que la del poliedro semi-regular denominado "ARQUIMEDIANO VIII" estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº.....- Lámina 40.

3. CÁLCULO ANALITICO DE LONGITUDES

3.1 Arista "a_6" del exaedro regular convexo generador

Se obtiene de la fórmula $r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$ deducida en el ejercicio G.E. nº.....- Lámina 2. Despejando en ella a_6, tendremos:

$$\boxed{a_6} = r_{ec}^6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times r_{ec}^6 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6} \qquad (1)$$

3.2 Arista "a_{VIII}" del Arquimediano VIII

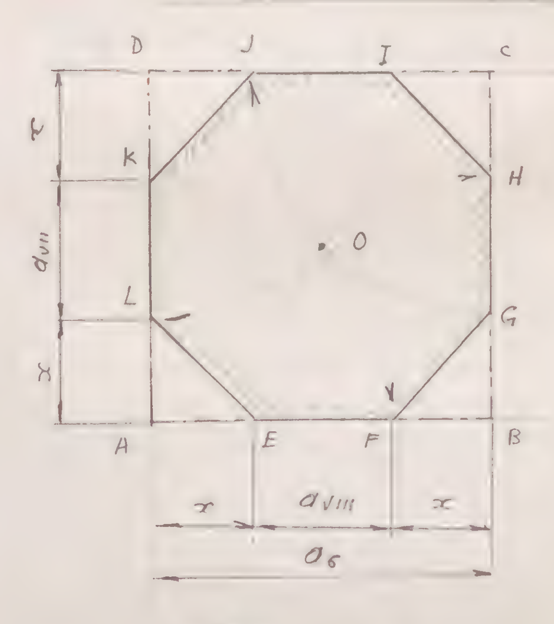


Figura 1

En la figura 1, ABCD es un cuadrado de lado a_6, en el cual se halla inscrito el octógono regular convexo E,F...K,L, al tomar desde sus vértices las distancias "x"

Los lados del cuadrado son las aristas "a_6" del exaedro generador. El centro del mismo es el punto O.

Junio 1980



Los lados del octógono regular convexo, son las aristas a_{VIII} del Arquimediano VIII.

Del triángulo rectángulo AEL en el que $\overline{AE} = \overline{AL} = x$ y $\overline{LE} = a_{VIII}$, tendremos:

$$\overline{LE} = \sqrt{\overline{AL}^2 + \overline{AE}^2}$$ y sustituyendo valores, será

$$\boxed{a_{VIII}} = \sqrt{x^2 + x^2} = \boxed{x\sqrt{2}}$$ y de aquí: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{VIII}$

$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FB}$ de donde

$a_6 = x + a_{VIII} + x = 2x + a_{VIII}$ y sustituyendo x,

$$a_6 = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} a_{VIII} + a_{VIII} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} + 1\right) a_{VIII} = (\sqrt{2}+1)\, a_{VIII}$$

y despejando a_{VIII}, tendremos:

$$\boxed{a_{VIII}} = a_6 : (\sqrt{2}+1) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \times a_6 = \frac{\sqrt{2}-1}{1} a_6 = \boxed{(\sqrt{2}-1)\, a_6} \quad (3)$$

3.3 Distancia "x" en que la truncadura de vértices del exaedro regular convexo produce el Arquimediano VIII.

Anteriormente dedujimos que $a_{VIII} = x\sqrt{2}$ que sustituido en (3), nos dará

$a_{VIII} = x\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)\, a_6$ en la que despejando "x" tendremos:



$$\boxed{x} = (\sqrt{2}-1)\,a_6 : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\,a_6 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}\,a_6 = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\,a_6} \quad (4)$$

La fórmula (4) y las características geométricas del poliedro estudiado, determinadas en el párrafo 2., justifican el enunciado de este modelo.

3.4. CONSTRUCCION DEL MODELO

Para poder efectuar la construcción de este modelo, determinemos previamente los valores numéricos siguientes, en función del dato $r_{ec}^{6} = 110$ mm.

Arista "a_6" del exaedro regular generador (aplicar fórmula (1)

$$\boxed{a_6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 110 \cong 1,15\,47\,00\,53\,9\ldots \times 110 \cong 127,01\,70\,59\,3 \cong \boxed{127 \text{ mm}}$$

Arista "a_{VIII}" del Arquimediano VIII (aplicar fórm. 3).

$$\boxed{a_{VIII}} = (\sqrt{2}-1) \times a_6 = \frac{\sqrt{2}-1}{3} \times 2\sqrt{3} \times 110 \cong 0,47\,82\,92\,62\,3\ldots \times 110 = \boxed{52,6 \text{ mm}}$$

Distancia "x" de la truncadura (aplicar fórm. (4)

$$\boxed{x} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\,a_6 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\,a_6 = 0,33\,82\,03\,95\,8\ldots \times 110 \cong \boxed{37,2 \text{ mm}}$$

Calvares Junio 1980

UNE A4 210 x 297



Para la construcción de este modelo son necesarias las siguientes piezas:

A) ARQUIMEDIANO NÚCLEO VIII DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES OCTOGONALES REGULARES 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2. en correspondencia con la figura 1.

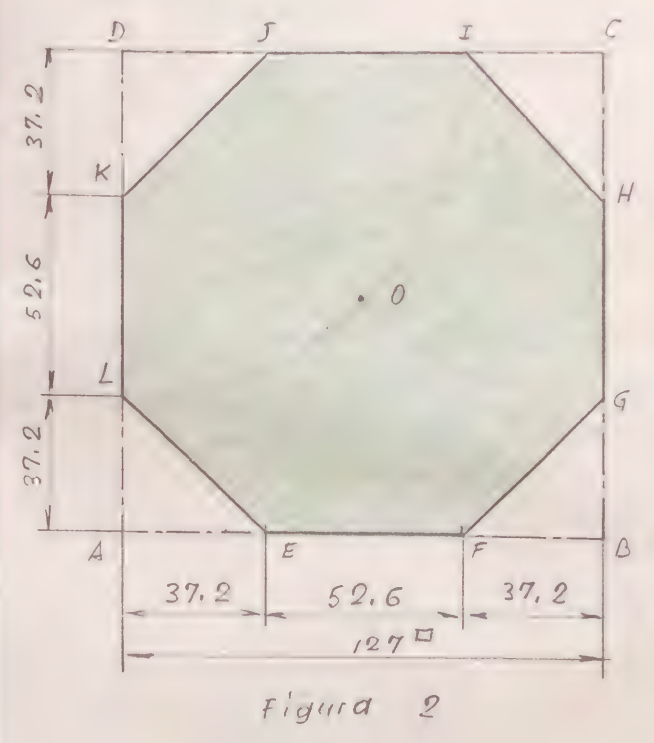


Figura 2

PIEZA Nº 1

6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

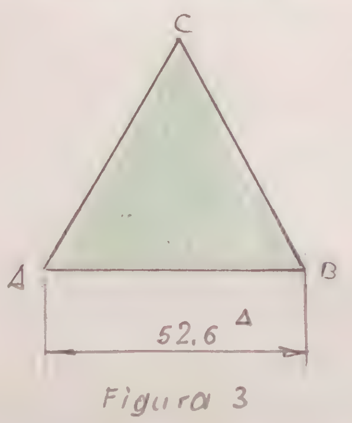


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 2 8 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Álvarez Enero 1980



PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS SUPERFICIALES, OCTOGONALES REGULARES 6 unidades

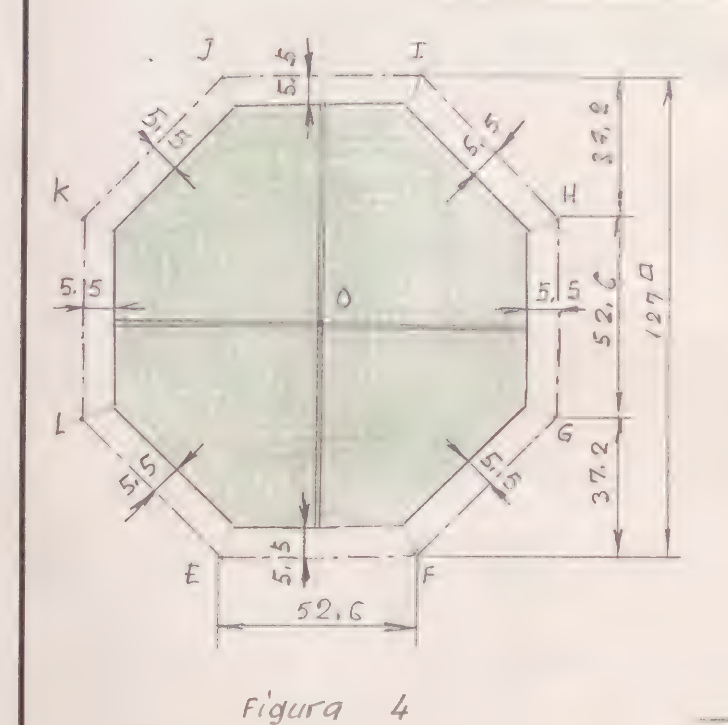


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono regular convexo E, F, ... K, L, de la figura 2, y sus dimensiones de la figura 4

PIEZA Nº 4 6 (4)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS SUPERFICIALES, TRIANGULARES, REGULARES 8 unidades.

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3, y se detallan en la figura 5

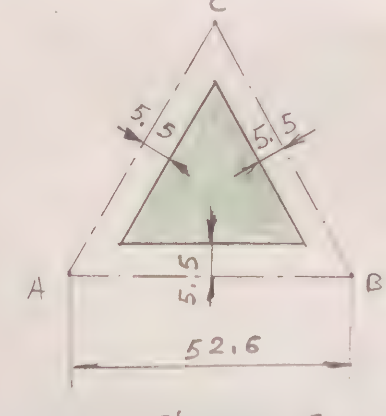


Figura 5

PIEZA Nº 5 8 (4)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS SUPERFICIALES, OCTOGONALES, REGULARES 24 unidades



Modelo M - 40.5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación en la fig. 2.

PIEZA Nº 6

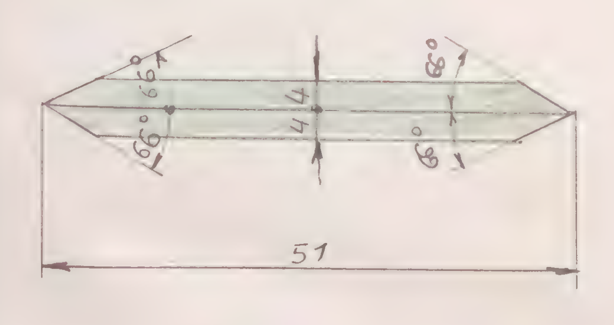
24 (u)

Figura 7

Figura 7

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS CONTIGUAS OCTOGONALES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8



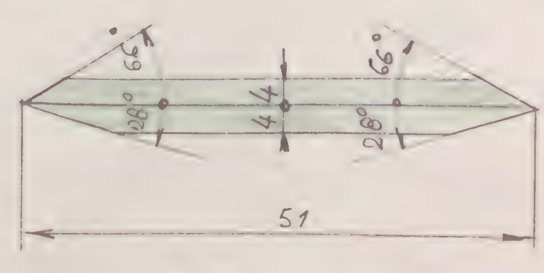
PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 8

Figura 8

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA OCTOGONAL CON OTRA TRIANGULAR 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 9.



PIEZA Nº 8 24 (u)

Figura 9

Figura 9



PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS OCTOGONALES REGULARES 6 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono regular convexo E, F, ... K, L de la figura 1, y se detallan en la figura 10

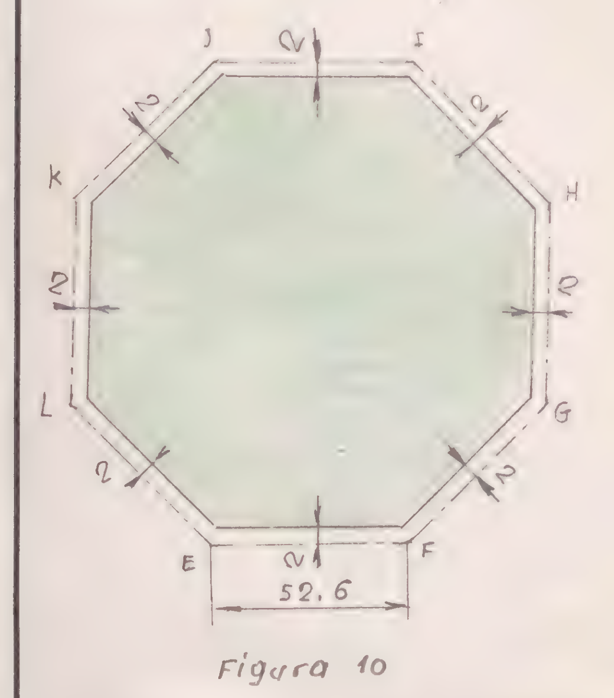


Figura 10

PIEZA Nº 9

6 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo regular ABC de la figura 3, y se detallan en la figura 11.

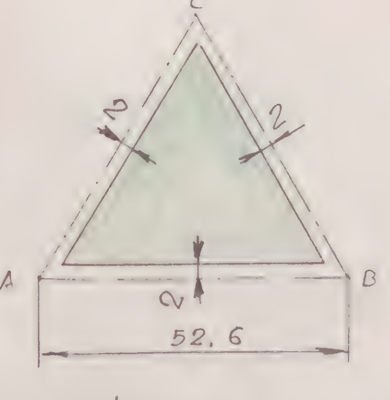


Figura 11

PIEZA Nº 10 8 (u)

Figura 11



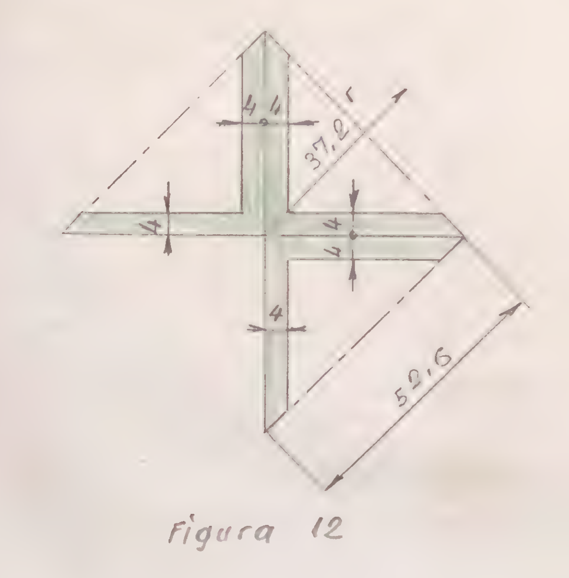
		Modelo M - 40.5

B) EXAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

Queda reducido a ocho pirámides triangulares, rectas, regulares, cuyo desarrollo lateral es el siguiente:

PIEZA Nº 11 DESARROLLO LATERAL DE LAS OCHO PIRÁMIDES TRUNCADAS 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12



PIEZA Nº 11

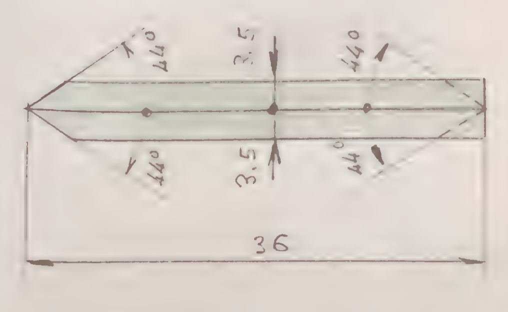
8 (u)

Figura 12

Figura 12

PIEZA Nº 12 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 13



PIEZA Nº 12 24 (u)

Figura 13

Figura 13

MODELO M- 40.5



VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-40.5, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, SEIS PIRÁMIDES RECTAS, REGULARES, OCTOGONALES, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS OCTOGONALES DEL ARQUIMEDIANO VIII GENERADO, Y POR VÉRTICES, LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL EXAEDRO GENERADOR, DE LOS CENTROS DE LAS CARAS OCTOGONALES, DESDE EL CENTRO "O" DEL POLIEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{6} = 110 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-40.5, seis pirámides rectas, regulares, octogonales, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras octogonales del Arquimediano VIII generado, y por vértices, las proyecciones, sobre la esfera circunscrita al exaedro regular convexo generador, de los centros de dichas caras octogonales, desde el centro "O" del poliedro generador.

Como se deduce del enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-40.5, al cual ha de añadirse seis pirámides de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación.

La altura "h_8" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{6}" de la esfera circunscrita al exaedro regular convexo generador, y del radio "r_{ei}^{VIII-8}" de la esfera tangente a las caras octogonales del Arquimediano generado. Así pues, será:

$$h_8 = r_{ec}^{6} - r_{ei}^{VIII-8} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^{6}, se obtuvo en el ejercicio G.G. nº... - Lámina 2, en función de la arista a_6 del exaedro generador. Su va-

UNE A4 210 x 297

Alvarez Junio 1980

lor es

$$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ a_6 \qquad (2)$$

El radio "r_{ei}^{VIII-8}" de la esfera tangente a las caras octogonales del Arquimediano VIII, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº.... .- Lámina 40. Su valor, en función de la arista "a_{VIII}" de dicho Arquimediano, es:

$$r_{ei}^{VIII-8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\ a_{VIII} \qquad (3)$$

y sustituyendo a_{VIII} por su valor $a_{VIII} = (\sqrt{2}-1)\ a_6$ (ver fórmula (3) del ejercicio M-40.5, tendremos:

$$r_{ei}^{VIII-8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \times (\sqrt{2}-1)\ a_6 = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{2}\ a_6 = \frac{1}{2}\ a_6 \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ a_6 - \frac{1}{2}\ a_6 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\ a_6 \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor de $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ r_{ec}^{6}$, en función del radio r_{ec}^{6} de la esfera circunscrita al exaedro generador (ver fórmula (1) del modelo M-40.5), tendremos:

$$h_8 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{6} = \frac{2\sqrt{3}\ (\sqrt{3}-1)}{6}\ r_{ec}^{6} = \frac{6-2\sqrt{3}}{6}\ r_{ec}^{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}\ r_{ec}^{6} \qquad (6)$$

UNE A4 210 x 297



Para obtener la longitud de la arista "a_8" de las caras laterales de las pirámides octogonales, tendremos en cuenta que "a_8" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es h_8, y el otro es el radio r_{c-8} de la circunferencia circunscrita a la cara octogonal del Arquimediano $\overline{\text{VIII}}$. Así pues será:

$$a_8 = \sqrt{(h_8)^2 + (r_{c-8})^2} \qquad (7)$$

El radio r_{c-8} de la circunferencia circunscrita a un octógono regular convexo, en función de su lado l_8, es

$$r_{c-8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\; l_8 \qquad (8)$$

(ver fórmula (1) del ejercicio G.P. 1.400-46)

La fórmula (8) aplicada a este estudio, en el que es $l_8 = a_{\overline{VIII}}$, siendo a su vez

$a_{\overline{VIII}} = (\sqrt{2}-1)\; a_6$ (ver fórmula (3), modelo M-40.5), y

$a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\; r_{ec}^{6}$ (ver fórmula (1), modelo M-40.5)

por lo que tendremos que

$$l_8 = a_{VIII} = (\sqrt{2}-1)\; a_6 = (\sqrt{2}-1) \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot r_{ec}^{6} \qquad (9)$$

valor que sustituido en (8), nos dará:



$$\boxed{r_{c-8}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\ l_8 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \times (\sqrt{2}-1) \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{6} =$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \times \frac{2\sqrt{3}\times(\sqrt{2}-1)}{3}\ r_{ec}^{6} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \frac{(2\sqrt{3})^2\times(\sqrt{2}-1)^2}{9}}\ r_{ec}^{6} =$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \frac{12\times(2+1-2\sqrt{2})}{9}}\ r_{ec}^{6} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \frac{4\times(3-2\sqrt{2})}{3}}\ r_{ec}^{6} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})\times 2\times(3-\sqrt{2})}{3}}\ r_{ec}^{6} = \sqrt{\frac{2\times(6+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-4)}{3}}\ r_{ec}^{6} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{2\times(2-\sqrt{2})}{3}}\ r_{ec}^{6}} \qquad (10)$$

Sustituyendo en (7) los valores (6) y (10), tendremos:

$$\boxed{d_8} = \sqrt{(h_8)^2 + (r_{c-8})^2} = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\ r_{ec}^{6}\right)^2 + \left[\sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})}{3}\ r_{ec}^{6}}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{2(2-\sqrt{2})}{3}}\ r_{ec}^{6} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2}{9} + \frac{2(2-\sqrt{2})}{3}}\ r_{ec}^{6} =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}}{9} + \frac{4-2\sqrt{2}}{3}}\ r_{ec}^{6} = \sqrt{\frac{12-6\sqrt{3}}{9} + \frac{4-2\sqrt{2}}{3}}\ r_{ec}^{6} =$$

$$= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{3} + \frac{4-2\sqrt{2}}{3}}\ r_{ec}^{6} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}+4-2\sqrt{2}}{3}}\ r_{ec}^{6} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{8-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}}\ r_{ec}^{6}} \qquad (11)$$

Las fórmulas (9) y (11) nos permiten calcular los ele-

UNE A4 210 x 297



mentos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides octogonales, rectas, regulares que se adicionarán al modelo M-40.5, para obtener el que se estudia.

Para este caso particular de $r_{ec}^{4} = 110$ mm, será:

$$\boxed{a_{VIII}} = (\sqrt{2}-1) \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{6} \cong 0.47\ 82\ 92\ 62\ 3\ldots \times 110 \cong \boxed{52{,}6 \text{ mm}}$$

y

$$\boxed{a_{8}} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}} \times r_{ec}^{6} \cong 0.75\ 44\ 25\ 00\ 4\ldots \times 110 \cong \boxed{83 \text{ mm.}}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO VIII, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\, a_6$,

Piezas 1 al 12, iguales a las del modelo M-40.5

B) PIRÁMIDES OCTOGONALES, REGULARES, RECTAS, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO M-40.5



		Modelo M- 40.6

PIEZA Nº 13 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS. 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

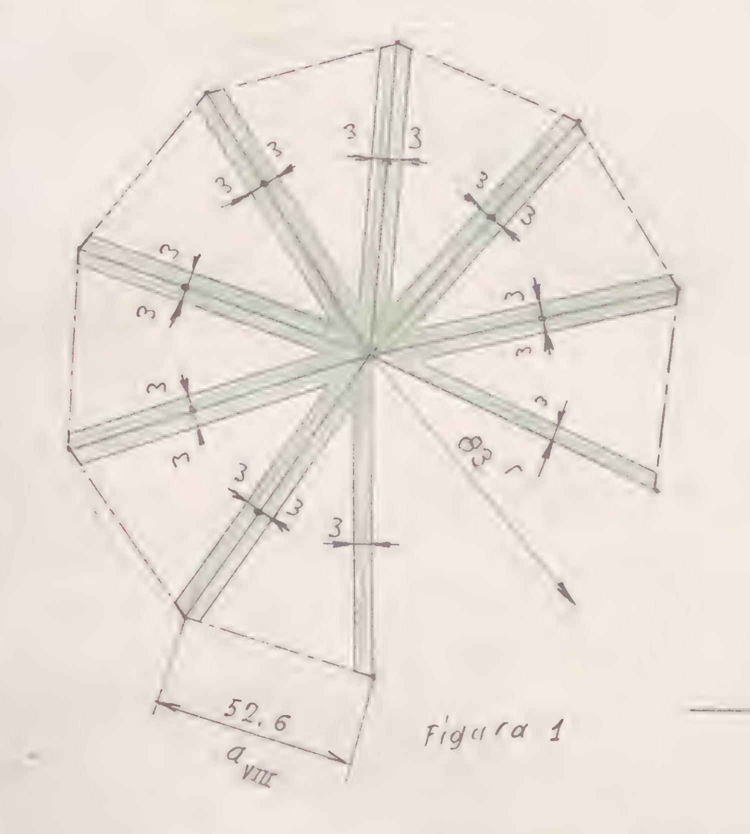


Figura 1

PIEZA Nº 13

6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 14 UNIONES ARISTAS 48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

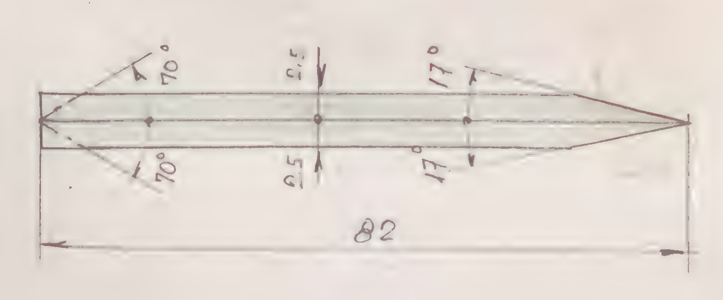


Figura 2

PIEZA Nº 14

48 (u)

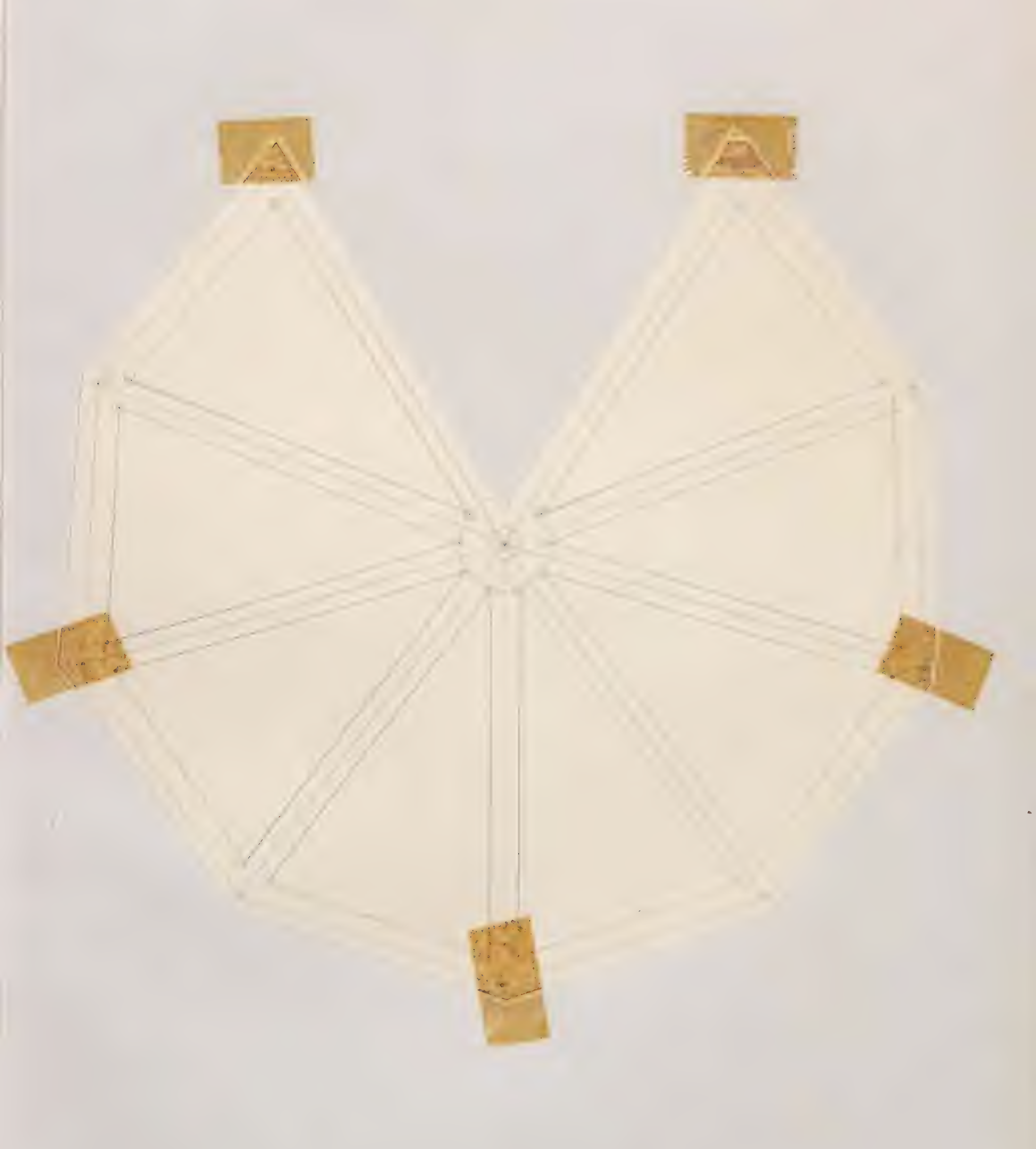
Figura 2

UNE A4 210 x 297

Talvarez Junio 1980



MODELO M- 40.6 PATRONES



MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO VIII" OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ADISTA "a_8", AL TOMAR SOBE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA $(2-\sqrt{2})a_8$.- EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO VIII", obtenido por truncadura de vértices de un octaedro regular convexo, de arista "a_8", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, la distancia $x = (2-\sqrt{2})\,a_8$.- El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el octaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{8} = Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

1) CONSIDERACIONES PREVIAS

El proceso geométrico denominado de TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, por el cual se obtienen varios de los POLIEDROS SEMIREGULARES CONVEXOS, denominados también POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, obteniéndose también por dicho proceso los propios poliedros regulares convexos, fué estudiado sistemáticamente y aplicado al TETRAEDRO REGULAR CONVEXO en los ejercicios M-39.1; M-39.5; M-39.7 y M-6.2

UNE A4·210 x 297



En dicho estudio se aprecia que las distintas posiciones del plano secante dan lugar a la obtención de un poliedro núcleo, de muy variadas formas, dependientes de la posición del plano secante con respecto al tetraedro generador. La posición de dicho plano secante se fija por la condición de pasar por puntos situados a la distancia variable "x", sobre las aristas que concurren en cada vértice del mencionado tetraedro generador.

Entre las diversas posiciones del plano secante, existen algunas notables en que el poliedro núcleo resultante, es un POLIEDRO ARQUIMEDIANO, o también un POLIEDRO REGULAR CONVEXO.

Dichas posiciones notables, estudiadas en el TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, se detallan resumidamente en el ejercicio M-40.5. El proceso de obtención, aplicado en el tetraedro regular convexo, puede hacerse extensivo a los restantes poliedros regulares convexos (exaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), obteniéndose también en ellos un poliedro núcleo que puede ser POLIEDRO ARQUIMEDIANO, o también POLIEDRO REGULAR CONVEXO.

El modelo que estudiamos en este ejercicio, puede obtenerse del modelo M-35.7, en el cual el poliedro núcleo obtenido por la TRUNCADURA DE VÉRTICES de un OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia $x = \frac{1}{2} a_8$, es el ARQUIMEDIANO III de arista $a_{III} = \frac{1}{2} a_8$

Alvarez Octubre 1980

UNE A4 210 x 297



Por consiguiente, si suponemos que el plano secante varíe de la posición $x = \frac{1}{2} a_8$, alejándose del vértice correspondiente, dicho plano secante dará lugar a la formación de un poliedro núcleo irregular de las siguientes características:

a) El plano secante produce en las caras del octaedro generador, triángulos equiláteros, cuyos lados van dis-minuyendo de longitud a medida que crece la distancia "$x > \frac{1}{2} a_8$

En efecto, sea (fig. 1), ABC una cara del octaedro generador de arista a_8; tomando, a partir de los vértices, distancias $x > \frac{1}{2} a_8$, obtendremos los puntos D, E, F, G, H, I, que nos sitúan las rectas (o trazas) de intersección de los tres planos secantes con la considerada cara ABC. Las intersecciones de dichas trazas dan lugar a la formación del triángulo equilátero MNP, cara del poliedro núcleo de lado $MN = l_3$.

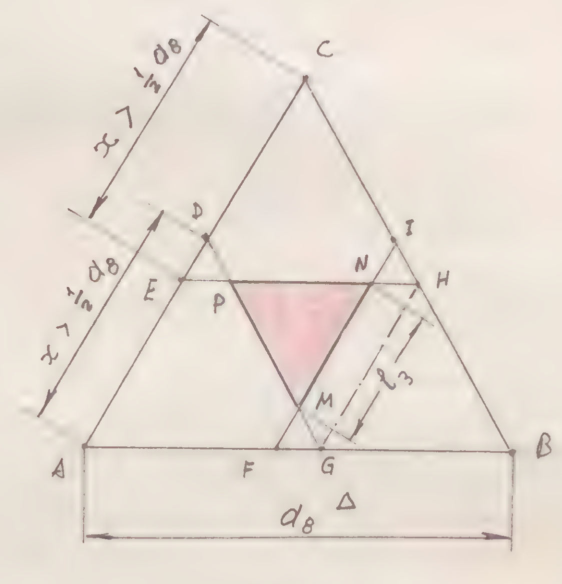


Figura 1

De la figura 1, se deducen las siguientes relaciones métricas:

$\overline{AE} = \boxed{\overline{DC}} = \overline{AC} - \overline{EC} = \boxed{a_8 - x}$. y también de ésta:



$\overline{ED} = \overline{EC} - \overline{DC} = x - (a_8 - x) = 2x - a_8$ mas siendo

$\overline{MI} = \overline{DC}$ y $\overline{NI} = \overline{ED}$ y también:

$\overline{MN} = \overline{MI} - \overline{NI} = \overline{DC} - \overline{ED} = \overline{EC} - \overline{ED} - \overline{ED} = \overline{EC} - 2\,\overline{ED}$ por lo que será:

$$\overline{MN} = l_3 = x - 2\times(2x - a_8) = x - 4x + 2a_8 = 2a_8 - 3x$$

de donde se obtiene finalmente:

$$l_3 = 2a_8 - 3x \qquad (1)$$

fórmula que nos determina la longitud del lado "l_3" del triángulo equilátero MNP, en función de la distancia "x" (variable) de la truncadura de vértices del octaedro generador, y del la arista "a_8" de este.

b) Por otra parte, el plano secante de dicha truncadura, produce en los ángulos sólidos de los vértices del octaedro generador, cuadrados de lado $\overline{EH} = x$ (fig. 1) sobre los que se forman octógonos equiángulos PNQRSTUV (figura 2) cuyos lados alternativos $\overline{PN}$, $\overline{QR}$, $\overline{ST}$, $\overline{UV}$, son coincidentes con los lados de dichos cuadrados.

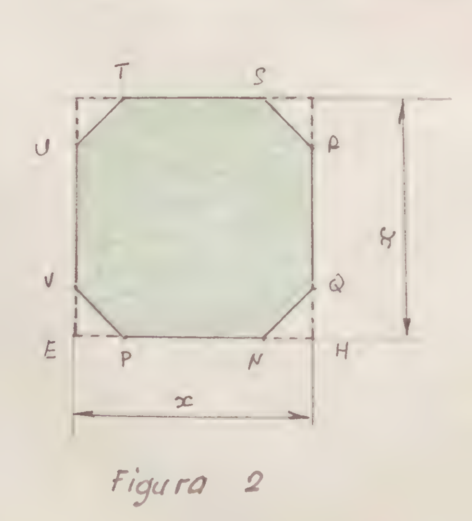


Figura 2

Los ocho triángulos equiláteros PNM (figura 1) y los seis octógonos equiángulos PNQR-STUV (figura 2) son los con-



torno de las caras que limitan al poliedro núcleo que se obtiene por truncadura de vértices del octaedro regular convexo generador, a la distancia $x > \frac{1}{2} a_8$.

El octógono PNQRSTUV (fig. 2), no es, en general, un octógono regular, salvo en una posición "x" del plano secante en la cual esto se produzca, en cuyo caso se verificará que. (ver fórmula (1) del ejercicio G.P. 1.400-461)

$$l_8 = (\sqrt{2} - 1)\ l_4 = (\sqrt{2} - 1)\ x \qquad (2)$$

siendo en esta fórmula "l_8" el lado del octógono regular inscrito en el cuadrado de lado "$l_4 = x$"

Igualando los valores de (1) y (2), lo que equivale a suponer sea "$l_3 = l_8$", y despejando después x, obtendremos la posición del plano secante en la que se obtienen simultáneamente octógonos regulares en dicho plano y triángulos equiláteros en las caras del octaedro generador. Así pues tendremos:

$$2\ a_8 - 3\ x = (\sqrt{2} - 1)\ x \quad " \quad 2 a_8 - 3 x = \sqrt{2}\ x - x \quad "$$

$$2\ a_8 = \sqrt{2}\ x - x + 3x = (2 + \sqrt{2})\ x \quad " \quad x = \frac{2 a_8}{2 + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\ a_8\ (2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = (2 - \sqrt{2})\ a_8$$ de donde se tiene finalmente:

$$x = (2 - \sqrt{2})\ a_8 \qquad (3)$$

UNE A4 210 x 297



La ecuación (5) nos demuestra que la truncadura de vértices de un octaedro regular convexo de arista "a_8", a la distancia $x = (2-\sqrt{2})\,a_8$, da lugar a la formación de un poliedro núcleo, semirregular convexo, compuesto de ocho caras triangulares regulares (ver características a) y de seis caras octogonales regulares (ver caracterís-ticas b), o sea que dicho poliedro núcleo es un "ARQUIMEDIANO VIII", estudiado en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 40, de las características siguientes:

Número de caras triangulares		$C_3 = 8$
Número de caras octogonales		$C_8 = 6$
Número de vértices	$= \dfrac{8 \times 3 + 6 \times 8}{3} =$	$V = 24$
Número de aristas	$= \dfrac{8 \times 3 + 6 \times 8}{2} =$	$A = 36$
Número de caras en un ángulo sólido	$=$	$1\,C_3 + 2\,C_8$

La longitud de la arista $a_{VIII} = l_3 = l_8$, se obtiene sustituyendo en (1) o en (2) el valor de (3).- Así pues, tendremos

$$\boxed{a_{VIII}} = l_3 = 2a_8 - 3x = 2a_8 - 3\times(2-\sqrt{2})\,a_8 = (2-6+3\sqrt{2})\,a_8 =$$

$$= \boxed{(3\sqrt{2}-4)\,a_8} \qquad (4)$$

[signature] Octubre 1980



fórmula que nos da la magnitud de la arista "a_{VIII}" del Arquimediano VIII generado, en función de la arista "a_8" del octaedro generado.

Como resumen de lo expuesto anteriormente, establecimos la siguiente proposición, que justifica el enunciado del modelo estudiado.

"El poliedro obtenido por la TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia "$x = (2-\sqrt{2})\, a_8$", es un ARQUIMEDIANO VIII, de arista igual a $a_{VIII} = (3\sqrt{2} - 4)\, a_8$"

2) CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

2.1) Arista "a_8" del octaedro regular convexo generador.

Se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{\ 8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_8$" deducida en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 3. Despejando en ella "a_8", tendremos

$$\boxed{a_8} = r_{ec}^{\ 8} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\, r_{ec}^{\ 8} = \frac{2\sqrt{2}}{2}\, r_{ec}^{\ 8} = \boxed{\sqrt{2}\ r_{ec}^{\ 8}} \qquad (5)$$

2.2) Arista "a_{VIII}" del Arquimediano generado

Se deduce de la fórmula (4) sustituyendo en ella el valor obtenido en (5).- Tendremos pues:



$$\boxed{a_{\overline{VIII}}} = (3\sqrt{2} - 4)\, a_8 = (3\sqrt{2} - 4) \times \sqrt{2}\; r_{ec}^{8} = \boxed{(6 - 4\sqrt{2})\; r_{ec}^{8}} \qquad (6)$$

2.3) Distancia "x" en la que la truncadura de vértices del octaedro regular convexo produce el ARQUIMEDIANO $\overline{VIII}$.

Se obtiene de la fórmula (3), sustituyendo en ella "a_8" por el valor obtenido en (5)

$$\boxed{x} = (2 - \sqrt{2})\, a_8 = (2 - \sqrt{2}) \times \sqrt{2}\; r_{ec}^{8} = \boxed{(2\sqrt{2} - 2)\; r_{ec}^{8}} \qquad (7)$$

2.4) Radio "r_{c-8}" de la circunferencia circunscrita al octógono regular de una cara "C_8" del Arquimediano $\overline{VIII}$, de arista "$a_{\overline{VIII}} = (6 - 4\sqrt{2})\; r_{ec}^{8}$"

Se obtiene de la fórmula "$r_{c-8} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}\; l_8$" obtenida en el ejercicio G.P. 1.400-46 (1), haciendo $l_8 = a_{\overline{VIII}} = (6 - 4\sqrt{2})\; r_{ec}^{8}$.

$$r_{c-8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\; a_{\overline{VIII}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \times (6 - 4\sqrt{2})\; r_{ec}^{8} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2}) \times (2 \times (3 - 2\sqrt{2}))^2}{2}}\; r_{ec}^{8} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2}) \times 4 \times (3 - 2\sqrt{2})^2}{2}}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{(2+\sqrt{2}) \times (3 - 2\sqrt{2})^2 \times 2}\; r_{ec}^{8} =$$

$$= \sqrt{(2+\sqrt{2})(9 + 8 - 12\sqrt{2}) \times 2}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{(2+\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) \times 2}\; r_{ec}^{8} =$$

$$= \sqrt{(34 + 17\sqrt{2} - 24\sqrt{2} - 24) \times 2}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{(10 - 7\sqrt{2}) \times 2}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{20 - 14\sqrt{2}}\; r_{ec}^{8}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{r_{c-8} = \sqrt{20 - 14\sqrt{2}}\; r_{ec}^{8}} \qquad (8)$$



Modelo M- 40.8

2.5) Radio " r_{ei}^{VIII-8} " de la esfera tangente a las caras octogonales del ARQUIMEDIANO VIII generado.

Dicho radio se obtuvo, en función de su arista, en el ejercicio G.E. nº.... - Lámina 40. Su valor es " $r_{ei}^{VIII-8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} a_{VIII}$ ". Sustituyendo en ella a_{VIII} por su valor obtenido en (6), tendremos:

$$\boxed{r_{ei}^{VIII-8}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \times a_{VIII} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \times (6 - 4\sqrt{2})\, r_{ec}^{8} = (\sqrt{2}+1)(3-2\sqrt{2})\, r_{ec}^{8} =$$

$$= (3\sqrt{2} + 3 - 4 - 2\sqrt{2})\, r_{ec}^{8} = \boxed{(\sqrt{2}-1)\, r_{ec}^{8}} \quad (9)$$

2.6) Altura " h_8 " de las pirámides auxiliares, rectas, octogonales regulares

Se obtiene como diferencia del radio " r_{ec}^{8} " de la esfera circunscrita al octaedro generador (dato del ejercicio), y del radio r_{ei}^{VIII-8} (fórmula 9).- Así pues, será:

$$\boxed{h_8} = r_{ec}^{8} - r_{ei}^{VIII-8} = r_{ec}^{8} - (\sqrt{2}-1)\, r_{ec}^{8} = \left[1 - (\sqrt{2}-1)\right] r_{ec}^{8} =$$

$$= (1 - \sqrt{2} + 1)\, r_{ec}^{8} = \boxed{(2-\sqrt{2})\, r_{ec}^{8}} \quad (10)$$

2.7) Arista " a'_8 " de las pirámides auxiliares, rectas, octogonales regulares.

Su valor es el de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Octubre 1980



siendo sus catetos: Uno la altura "$h_8 = (2-\sqrt{2})\, r_{ec}^{8}$" (ver fórmula (10), y el otro, el radio "$r_{c-8} = \sqrt{20 - 14\sqrt{2}}\, r_{ec}^{8}$" (ver fórmula (8). Así pues tendremos:

$$\boxed{a'_8} = \sqrt{(h_8)^2 + (r_{c-8})^2} = \sqrt{\left[(2-\sqrt{2})\, r_{ec}^{8}\right]^2 + \left[\sqrt{20-14\sqrt{2}}\, r_{ec}^{8}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{(2-\sqrt{2})^2 + (20 - 14\sqrt{2})}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{4 + 2 - 4\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2}}\; r_{ec}^{8} =$$

$$= \boxed{\sqrt{26 - 18\sqrt{2}}\; r_{ec}^{8}} \qquad (11)$$

Las magnitudes necesarias para la construcción de este modelo, se deducen de las fórmulas (5), (6), (11) y (8). Para $r_{ec}^{8} = 110$ mm sus valores numéricos son:

(a) Arista "a_8" del octaedro generador (fórmula 5)

$$\boxed{a_8} = \sqrt{2}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{2} \times 110 \cong 1,41\,42\,13\,56\,2\ldots \times 110 \cong \boxed{155,6 \text{ mm}}$$

(b) Arista "a_{VIII}" del Arquimediano VIII (fórmula 6)

$$\boxed{a_{VIII}} = (6 - 4\sqrt{2})\; r_{ec}^{8} = (6 - 4\sqrt{2}) \times 110 \cong 0,34\,31\,45\,75\,2\ldots \times 110 \cong \boxed{37,7 \text{ mm}}$$

(c) Arista "a'_8" de las pirámides auxiliares rectas, octogonales regulares (fórmula 11)

$$\boxed{a'_8} = \sqrt{26 - 18\sqrt{2}}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{26 - 18\sqrt{2}} \times 110 \cong 0.73\,76\,69\,22\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{81,1 \text{ mm}}$$



		Modelo M-40.8

(d) Radio r_{c-8} de la circunferencia circunscrita al octógono regular de una cara "C_8" del Arquimediano VIII, de arista $a_{VIII} = (6 - 4\sqrt{2})\, r_{ec}^{8}$ (fórmula 8)

$$r_{c-8} = \sqrt{20 - 14\sqrt{2}}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \times 110 \cong 0.448341533\ldots \times 110 \cong 49.3 \text{ mm}$$

A la vista de los resultados numéricos anteriores, podemos proceder a la construcción de este modelo corpóreo, para el cual son necesarias las siguientes piezas:

A) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M-3.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M-3.102

B) ARQUIMEDIANO VIII GENERADO, DE CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

UNE A4 210 x 297





Figura 3

PIEZA Nº 3   8(u)

Figura 3

PIEZA Nº 4   CARAS SUPERFICIALES OCTOGONALES REGULARES

6 unidades

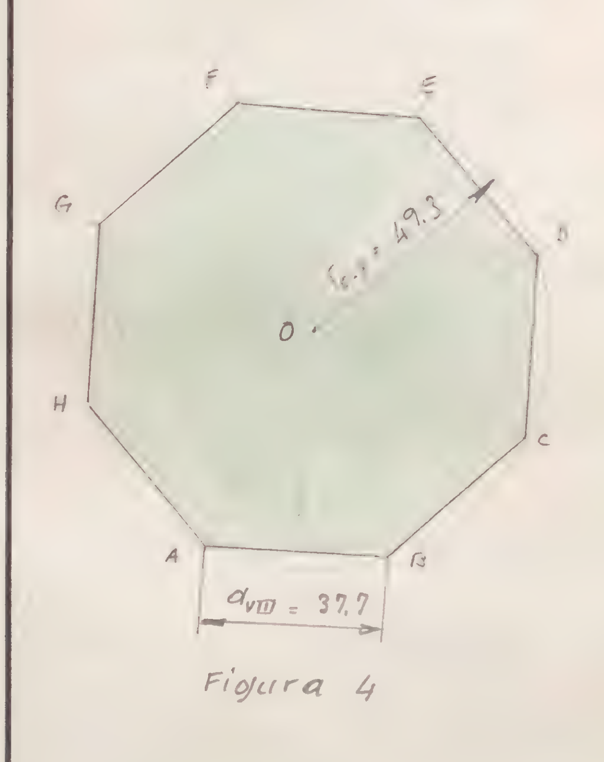


Figura 4

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

AB = BC = BD = DE = EF = FG = GH

r_{c-8} = 1.3065... × 37.7 = 49.3 mm

PIEZA Nº 4

6 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5   REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES

8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3, y se detallan en la figura nº 5



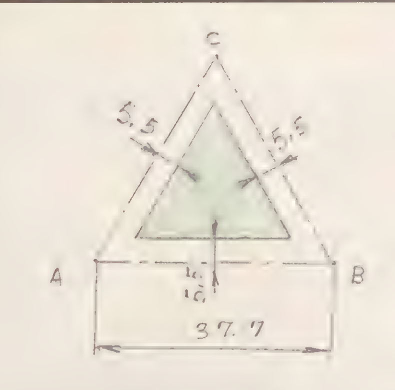


Figura 5

PIEZA Nº 5

8 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS OCTOGONALES REGULARES 6 unidades

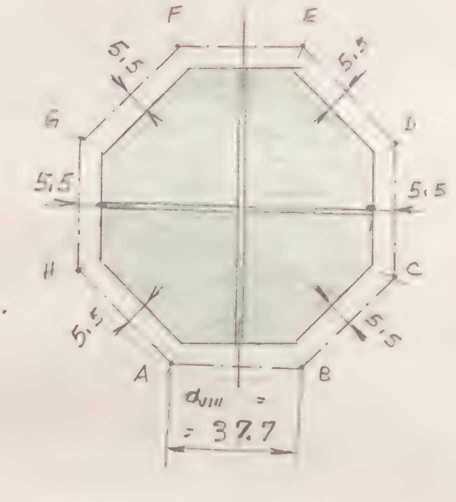


Figura 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono regular convexo ABCDEFGH de la figura 4, y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 6 6 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS OCTOGONALES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

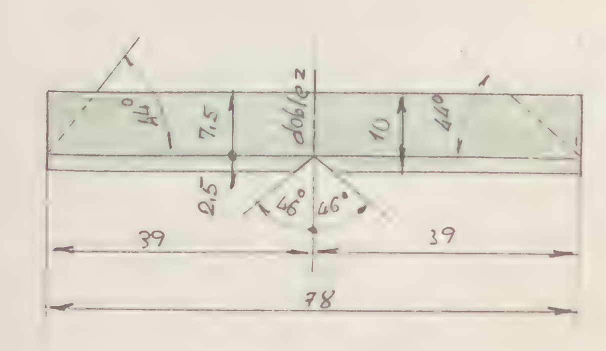


Figura 7

PIEZA Nº 7

24 (u)

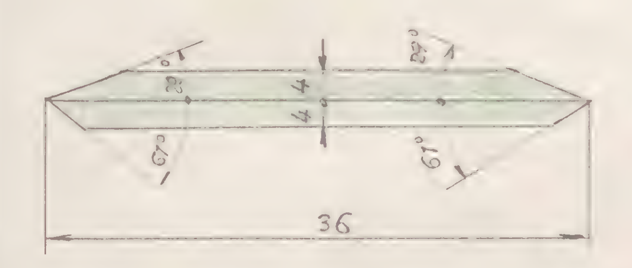
Figura 7

Tavares Octubre 1980



PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 36 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8



PIEZA Nº 8 36 (u)

Figura 8

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

8 unidades

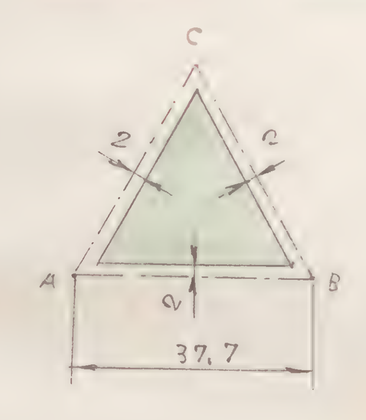


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3, y se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 9 8(u)

Figura 9

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS OCTOGONALES

6 unidades

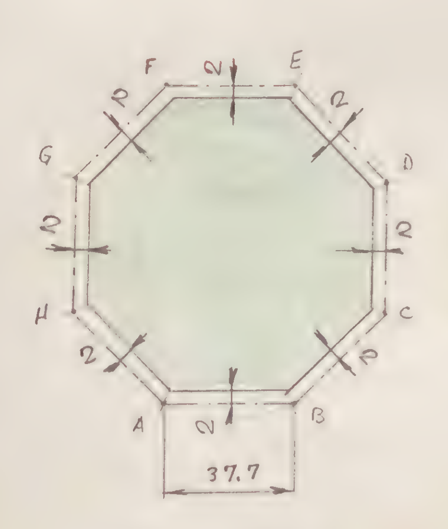


Figura 10

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono ABCDEFGH de la figura 4, y se detallan en la fig. 10

PIEZA Nº 10 6(u)

Figura 10



c) PIRÁMIDES AUXILIARES REGULARES, OCTOGONALES, DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 11 DESARROLLO LATERAL 6 unidades

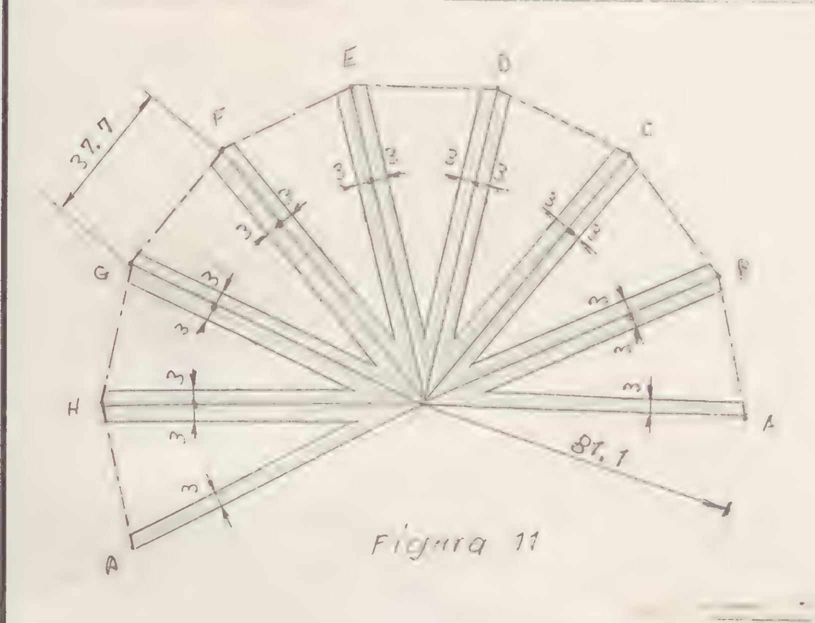


Figura 11

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA.

PIEZA Nº 11 6 (u)

Figura 11

PIEZA Nº 12 UNIONES ARISTAS 48 unidades

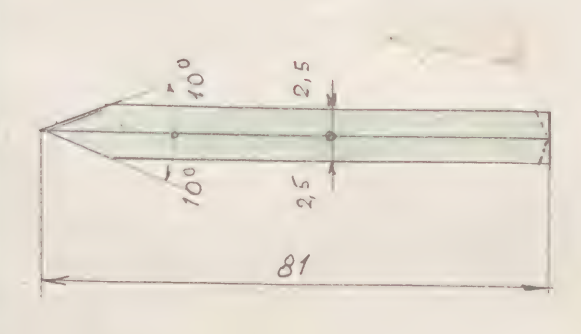


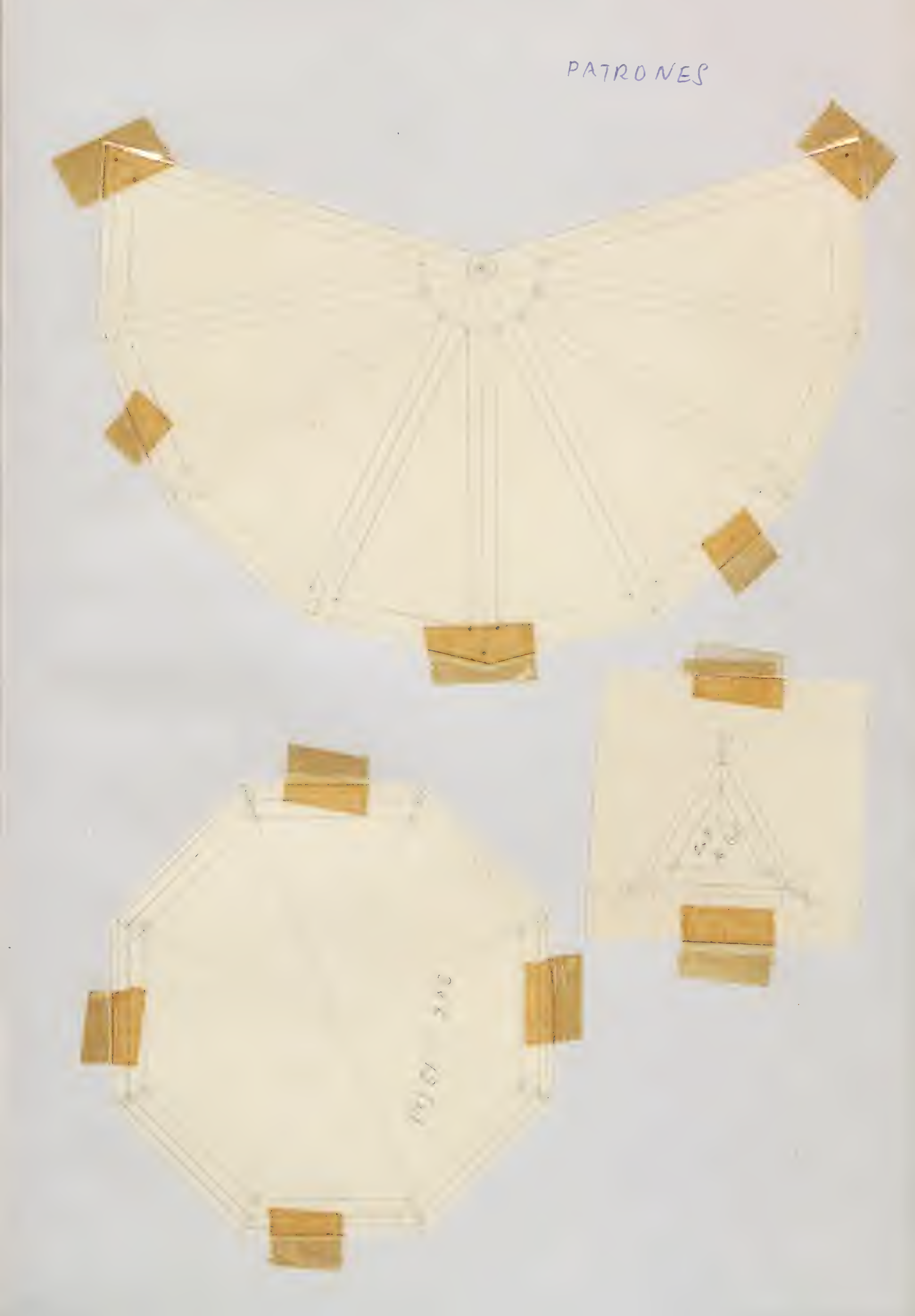
Figura 12

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

PIEZA Nº 12 48 (u)

Figura 12

MODELO M-40.8



VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-40.7, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, OCHO PIRÁMIDES RECTAS, TRIANGULARES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS TRIANGULARES DEL ARQUIMEDIANO VIII GENERADO, Y POR VÉRTICES, LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL OCTAEDRO GENERADOR, DE LOS CENTROS DE LAS CARAS TRIANGULARES, DESDE EL CENTRO "O" DEL POLIEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-40.8

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-40.7, ocho pirámides rectas, triangulares, regulares, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras triangulares del Arquimediano VIII generado, y por vértices, las proyecciones, sobre la esfera circunscrita al octaedro generador, de los centros de las caras triangulares desde el centro "O" del poliedro generador.

Como se deduce del enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-40.7, al cual ha de añadírsele ocho pirámides de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación.

La altura "h_3" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita al octaedro regular convexo generador, y del radio "r_{ei}^{VIII-3}" de la esfera tangente a las caras del Arquimediano VIII generado. Así pues, será:

$$h_3 = r_{ec}^{8} - r_{ei}^{VIII-3} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^{8}, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº... - Lámina 3 en función de la arista "a_8" del octaedro generador. Su va-

UNE A4 210 x 297



lor e:

$$r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8 \quad (2)$$

El radio "r_{ei}^{VIII-3}" de la esfera tangente a las caras triangulares del Arquimediano VIII, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº--- ,- Lámina 40. Su valor, en función de la arista "a_{VIII}" de dicho Arquimediano, es:

$$r_{ei}^{VIII-3} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{6} a_{VIII} \quad (3)$$

y sustituyendo en (3) el valor de $a_{VIII} = (3\sqrt{2} - 4) a_8$ (ver fórmula (4) del ejercicio M-40.7, tendremos:

$$r_{ei}^{VIII-3} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{6} a_{VIII} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{6} \times (3\sqrt{2} - 4) a_8 =$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} + 2\sqrt{6})(3\sqrt{2} - 4)}{6} a_8 = \frac{9\sqrt{6} + 6\sqrt{12} - 12\sqrt{3} - 8\sqrt{6}}{6} a_8 =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + 6 \times 2\sqrt{3} - 12\sqrt{3}}{6} a_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_8 \quad (4)$$

Sustituyendo ahora en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_3 = r_{ec}^{8} - r_{ei}^{VIII-3} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8 - \frac{\sqrt{6}}{6} a_8 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} a_8 \quad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor de $a_8 = \sqrt{2}\, r_{ec}^{8}$, en función del radio r_{ec}^{8} de la esfera circunscrita al octaedro generador (ver fórmula (5) del modelo M-40.6, tendremos:

UNE A4 210 x 297



Modelo M-40.8

$$\boxed{h_3} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}\, a_8 = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2}\; r_{ec}^{8} = \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\times\sqrt{2}}{6}\, r_{ec}^{8} =$$

$$= \frac{3\times 2-\sqrt{12}}{6}\, r_{ec}^{8} = \frac{6-2\sqrt{3}}{6}\, r_{ec}^{8} = \boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{8}} \qquad (6)$$

Para obtener la longitud de la arista "a'_3" de las caras laterales de las pirámides triangulares, tendremos en cuenta que "a'_3" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es "h_3", y el otro es el radio r_{c-3} de la circunferencia circunscrita a la cara triangular del Arquimediano VIII. Así pues será:

$$\boxed{a'_3 = \sqrt{(h_3)^2 + (r_{c-3})^2}} \qquad (7)$$

El radio r_{c-3} de la circunferencia circunscrita a un triángulo regular convexo (equilátero), en función de su lado l_3, es

$$\boxed{r_{c-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l_3} \qquad (8)$$

(ver fórmula (2) del ejercicio G.P. 1400-4)

La fórmula (8) aplicada a este estudio, es $l_3 = a_{VIII}$, siendo a su vez:

$a_{VIII} = (3\sqrt{2}-4)\, a_8$ (ver fórmula (4), modelo M-40.7),

$a_8 = \sqrt{2}\; r_{ec}^{8}$ (ver fórmula (5), modelo M-40.7)

por lo que tendremos que:

UNE A4·210 x 297

Tavares Noviembre 1980



$$\boxed{l_3} = \boxed{a_{VIII}} = (3\sqrt{2}-4)\,a_8 = (3\sqrt{2}-4)\sqrt{2}\;r_{ec}{}^8 = (3\times 2 - 4\sqrt{2})\;r_{ec}{}^8 =$$

$$= \boxed{(6-4\sqrt{2})\;r_{ec}{}^8} \qquad (9)$$

valor que sustituido en (8), nos dará:

$$\boxed{r_{c-3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,l_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\times(6-4\sqrt{2})\;r_{ec}{}^8 = \boxed{\frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{3}\;r_{ec}{}^8} \qquad (10)$$

Sustituyendo en (7) los valores (6) y (10), tendremos:

$$\boxed{a'_3} = \sqrt{(h_3)^2 + (r_{c-3})^2} = \sqrt{\left[\frac{3-\sqrt{3}}{3}\;r_{ec}{}^8\right]^2 + \left[\frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{3}\;r_{ec}{}^8\right]^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{3}\right)^2}\;r_{ec}{}^8 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{3}-4\sqrt{6})^2}{9}}\;r_{ec}{}^8 =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}+36\times 3+16\times 6-48\sqrt{18}}{9}}\;r_{ec}{}^8 =$$

$$= \sqrt{\frac{12-6\sqrt{3}+108+96-48\times 3\sqrt{2}}{9}}\;r_{ec}{}^8 = \sqrt{\frac{216-6\sqrt{3}-144\sqrt{2}}{9}}\;r_{ec}{}^8 =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{216-6\sqrt{3}-144\sqrt{2}}}{3}\;r_{ec}{}^8} \qquad (11)$$

Las fórmulas (9) y (11) nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides triangulares regulares, que se adicionan al modelo M-40.7, para obtener el que se estudia.



Para este caso particular de $r_{ec}^{8} = 110$ mm, será:

$$\boxed{a_{VIII}} = (6 - 4\sqrt{2}) \cdot r_{ec}^{8} \cong 0,34\ 31\ 45\ 75\ 2\ldots \times 110 \cong \boxed{37,8 \text{ mm}}$$

y

$$\boxed{a'_{3}} = \frac{\sqrt{216 - 6\sqrt{3} - 144\sqrt{2}}}{3}\, r_{ec}^{8} \cong 0,46\ 67\ 78\ 83\ 2\ldots \times 110 \cong \boxed{51,4 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO $\overline{VIII}$, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA "$x = (2 - \sqrt{2})\, a_{8}$"

Piezas 1 al 12, iguales a las del modelo M- 40.7

B) PIRÁMIDES TRIANGULARES, RECTAS, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO M - 40.7

PIEZA Nº 13 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS — 8 unidades

Su forma y dimensiones, se detallan en la figura nº 1

Tawarez — Noviembre 1980



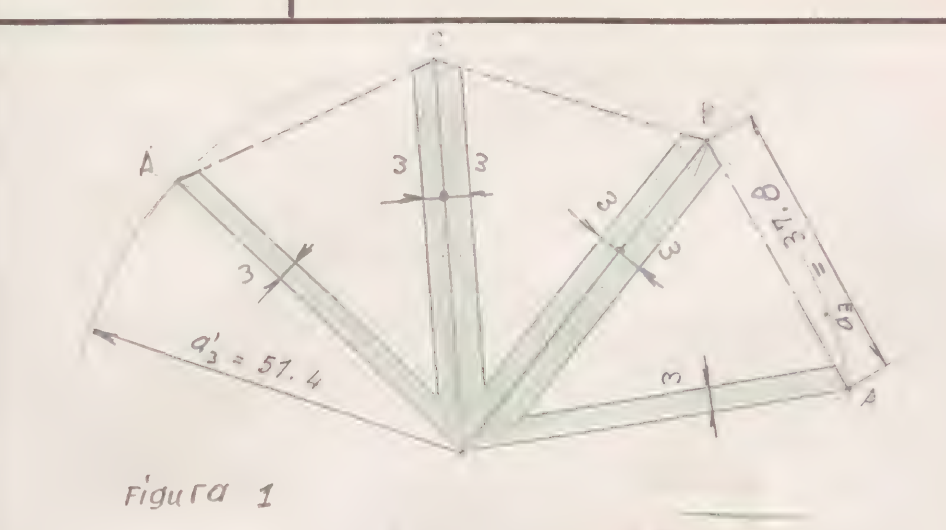


Figura 1

PIEZA Nº 13

8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 14 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

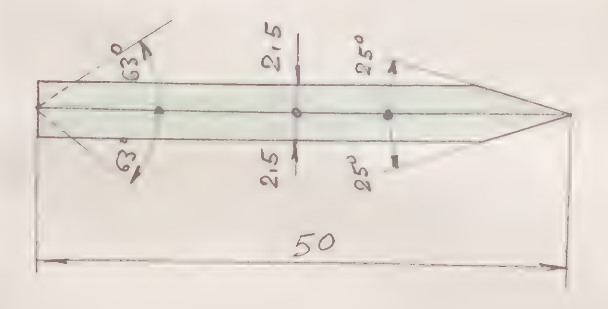


Figura 2

PIEZA Nº 14

24 (u)

Figura 2



MODELO M- 40.8

PATRONES



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO IX", FORMADO POR VEINTE CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3), Y DOCE CARAS DECAGONALES REGULARES, (C_{10}) CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1\,C_3 + 2\,C_{10}$

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{IX} = 110 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO IX", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3) y doce caras decagonales regulares (C_{10}), concurriendo en cada vértice $1\,C_3 + 2\,C_{10}$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G. E. nº.....- Lámina 41, y representado en sus vistas principal, superior y lateral izquierda en la mencionada lámina 41, a escala 1:1, con el radio r_{ec}^{IX} de su esfera circunscrita, de $r_{ec}^{IX} = 55$ mm.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{IX} = 110 \text{ mm}$$

Las características geométricas del ARQUIMEDIANO IX, son las siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
Número de caras decagonales	$C_{10} = 12$
Número de vértices = $\frac{20 \times 3 + 12 \times 10}{3}$ =	$V = 60$
Número de aristas = $\frac{20 \times 3 + 12 \times 10}{2}$ =	$A = 90$
Número de caras de un ángulo sólido =	$1\,C_3 + 2\,C_{10}$

UNE A4:210 x 297



Para poder obtener el despiece de este poliedro, calculemos previamente la longitud "a_{IX}" de la arista del mismo, en función del radio "r_{ec}^{IX}" de su esfera circunscrita. Para ello utilizaremos la fórmula "$r_{ec}^{IX} = \sqrt{\frac{37 + 15\sqrt{5}}{8}}\, a_{IX}$" deducida en el mencionado ejercicio G.E. nº____ - Lámina 41" que nos da el valor del radio de la esfera circunscrita, en función de la arista a_{IX} del Arquimediano IX.- Despejando en ella a_{IX}, tendremos:

$$\boxed{a_{IX}} = r_{ec}^{IX} : \sqrt{\frac{37 + 15\sqrt{5}}{8}} = \left(1 : \sqrt{\frac{37 + 15\sqrt{5}}{8}}\right) r_{ec}^{IX} = \sqrt{1 : \frac{37 + 15\sqrt{5}}{8}}\; r_{ec}^{IX} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{8}{37 + 15\sqrt{5}}}\; r_{ec}^{IX}} \qquad (1)$$

Para el caso estudiado (r_{ec}^{IX} = 110 mm), tendremos:

$$\boxed{a_{IX}} = \sqrt{\frac{8}{37 + 15\sqrt{5}}}\; r_{ec}^{IX} \cong 0,33\,67\,62\,81\,2\ldots \times 110 \cong \boxed{37,0 \text{ mm}}$$

Esta sola magnitud nos permite la construcción del poliedro estudiado, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

C

A B

$\ell_3 = 37^{\Delta}$

Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

Alvarez 17 Noviembre 1980

UNE A4 210 x 297



Modelo M-41.1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES DECAGONALES, REGULARES

12 unidades

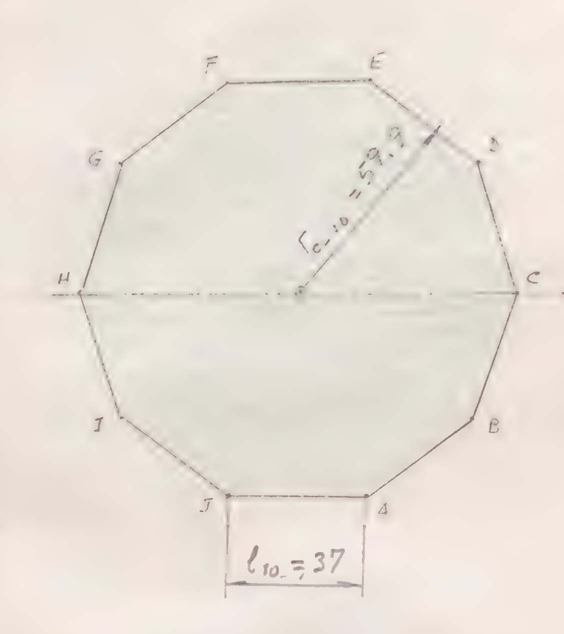


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2. Para su construcción, calculamos r_{c-10}, cuyo valor es el siguiente (ver G.P. 1.400-47)

$$r_{c-10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times l_{10} = 1.618\ldots \times 37 = 59.9 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3.

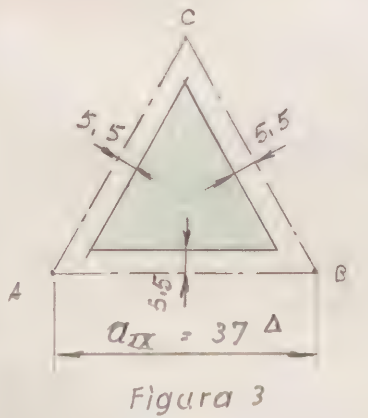


Figura 3

PIEZA Nº 3 20 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS DECAGONALES 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del decágono

UNE A4 210 x 297

Álvarez Noviembre 1980



ABCDEFGHIJ de la figura 9 y se detallan en la figura 4

AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = IJ = = JA = 37 mm

PIEZA Nº 4   12 (u)

Figura 4

F E D G C H B I J A

5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5

$r_{c.10} = 59.9$

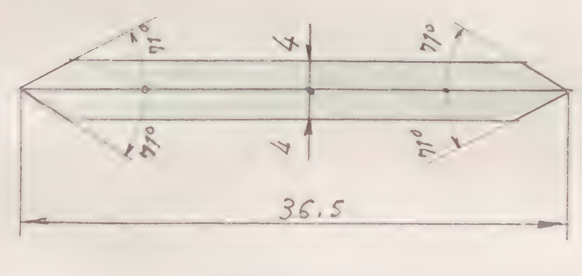
$l_{10} = 37$

Figura 4

PIEZA Nº 5   UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS DECAGONALES

30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5



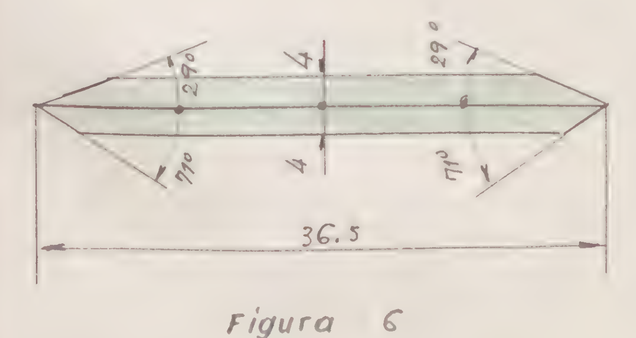
PIEZA Nº 5   30 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6   UNIONES ARISTAS DE UNA CARA DECAGONAL Y OTRA TRIANGULAR   60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



PIEZA Nº 6   60 (u)

Figura 6

Figura 6

UNE A4 210 x 297

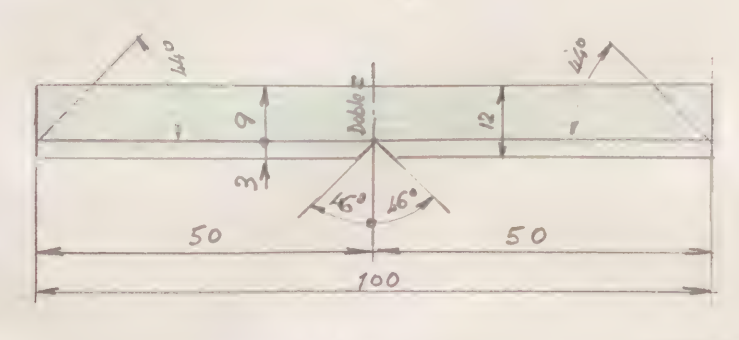
[illegible]   Noviembre 1980



		Modelo M- 41.1

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS DECAGONALES 48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 4.



PIEZA Nº 7 48 (u)

Figura 7

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 8

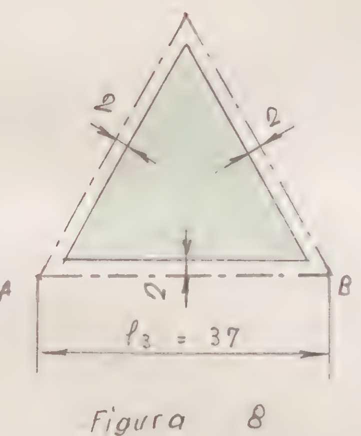


Figura 8

PIEZA Nº 8 20 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 . FORRO COLOREADO EN CARAS DECAGONALES 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del decágono regular ABC.... HIJ de la figura 2, y se detallan en la figura nº 9

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-41.1



Figura 9

PIEZA Nº 9

12 (11)

Figura 9

UNE A4 210 x 297

Alvarez Noviembre 1980



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS "ARQUIMEDIANO IX", FORMADO POR VEINTE CARAS TRIANGULARES, REGULARES (C_3) Y DOCE CARAS DODECAÉDRICAS REGULARES (C_{12}), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1 C_3 + 2 C_{10}$

Radio de la esfera circunscrita

$r_{ec}^{IX} = 110$ m m.

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO IX", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3) y doce caras decagonales regulares convexas (C_{10}), concurriendo en cada vértice $1\,C_3 + 2\,C_{10}$.

Este modelo puede considerarse como una variante del M-41.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M-41.1.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{IX} = radio de la esfera circunscrita:

$$\boxed{r_{ec}^{IX} = 110 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este poliedro, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A4 210 x 297



Modelo M-41.2

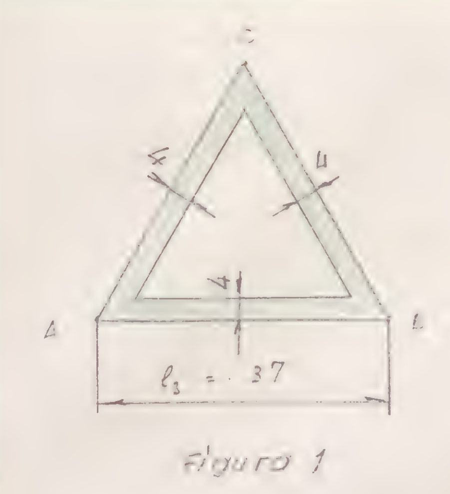


Figura 1

PIEZA Nº 1

20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES DECAGONALES, REGULARES.

12 unidades

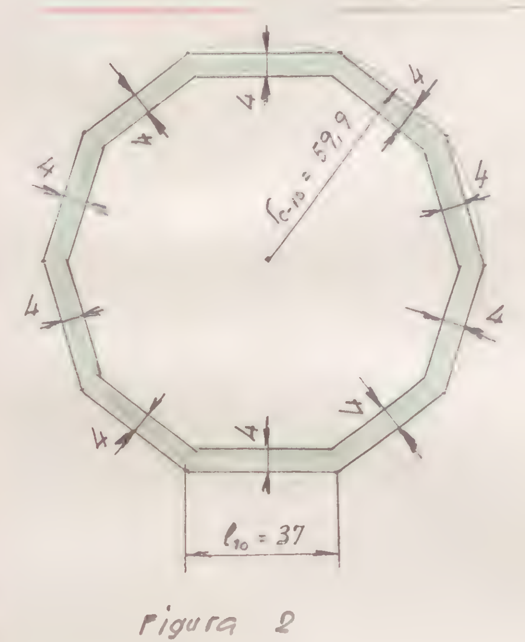


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2.

PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS DECAGONALES

30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

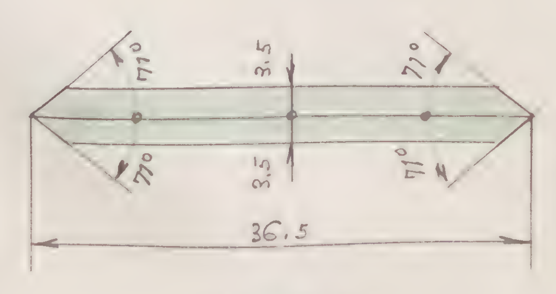


Figura 3

PIEZA Nº 3 30 (u)

Figura 3

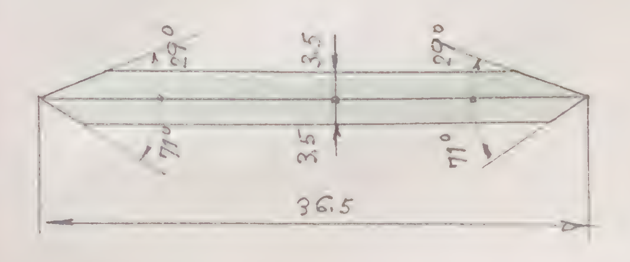
UNE A4 210 x 297

Tavares Noviembre 1980

Modelo M-41.2

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA DECAGONAL Y OTRA TRIANGULAR 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4



PIEZA Nº 4

60 (u)

Figura 4

Figura 4

———



VARIANTE DEL MODELO M-41.1,

DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIEN-

DO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU

ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrito

$r_{ec}^{IX} = 76,1$ mm.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO IX", formado por veinte caras triangulares regulares (C_3), y doce caras decagonales regulares (C_{12}), concurriendo en cada vértice $1 C_3 + 2 C_{10}$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-41.1, de igual forma que éste, siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{IX} = 76,1$ mm).

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M-41.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción, $k = 76,1 : 110$, o relación de los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{IX} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-41.3

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido consignadas en las diferentes figuras del modelo M-41.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-41.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1 20 (u)	37.0	25.6

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES DECAGONALES REGULARES

8 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2 8 (u)	37.0 59.9	25.6 41.4

UNE A4 210 x 297



PIEZA Nº3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº3 20 (u)	37.0 5.5	25.6 4.0

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS DECAGONALES 12 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4 12 (u)	37.0 59.9 5.5	25.6 41.4 4.0

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS DECAGONALES 30 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5 30 (u)	36.5 4.0 71°	24.0 4.0 71°

UNE A4:210 x 297



		Modelo M-443

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA DECAGONAL Y OTRA TRIANGULAR 60 unidades

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6 60(u)	36,5	24,0
	4,0	4,0
	29°	29°
	71°	71°

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS DECAGONALES 48 unidades

La figura 7, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 7	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 7	50,0	33,0
48(u)	3,0	2,5
	9,0	7,5
	12,0	10,0
	100,0	66,0
	44°	44°
	46°	46°

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES 20 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:



Modelo M- 41.3

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 8	37,0	25,6
20 (u)	2,0	2,0

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS DECAGONALES

12 unidades

La figura 9 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 9	37,0	25.6
12 (u)	2.0	2.0

UNE A4 210 x 297

Alvarez Noviembre 1980



VARIANTE DEL MODELO M-41.2, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ee}^{II} = 76.1 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

Ejercicios de construcción de poliedros: MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-41.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas ARQUIMEDIANO IX, formado por veinte caras triangulares regulares (C_3), y doce caras decagonales regulares (C_{10}), concurriendo en cada vértice $1\ C_3 + 2\ C_{10}$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-41.2, de igual forma que éste, pero siendo más pequeño el radio de su esfera circunscrita. ($r_{ec}^{IX} = 76.1 < 110$)

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, desarrollado en el modelo M-41.2, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{IX} = 76,1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76,1}{110} = 0,69\widehat{18}\ldots$$

Modelo M-41.4

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-41.2, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-41.4, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas
PIEZA Nº 1	37.0	25.6
20 (u)	4.0	3.0

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES DECAGONALES, REGULARES

12 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2	37.0	25.6
12 (u)	59.9	41.4
	4.0	3.0

UNE A4 210 x 297

Tavares Noviembre 1980



Modelo M-41.4

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS DECAGONALES

30 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3 30 (u)	36.5 3.5 71º	25.0 2.5 71º

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA DECAGONAL Y OTRA TRIANGULAR 60 unidades

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4 60 (u)	36.5 3.5 71º 29º	25.0 2.5 71º 29º

UNE A4:210 x 297

Tavares Noviembre 1980



MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO IX", OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, de arista "a_{12}", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA "$x = \frac{1}{10} \times (5 - \sqrt{5})\, a_{12}$".- EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL DODECAEDRO REGULAR GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador

$$r^{12}_{ec} = 110 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO IX" obtenido por truncadura de vértices de un dodecaedro regular convexo, de arista "a_{12}", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, la distancia "$x = \frac{1}{10} \times (5 - \sqrt{5})\, a_{12}$".- El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el dodecaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{12} = radio de la esfera circunscrita al dodecaedro regular convexo generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$

Teniendo presente lo expuesto en las CONSIDERACIONES PREVIAS del ejercicio "modelo M-40.5" en las que se destaca el proceso geométrico denominado TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, por el que se obtienen muchos de los POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, entre los que se encuentra el "ARQUIMEDIANO IX" de este ejercicio, podemos establecer de inmediato las propiedades del poliedro núcleo que se obtiene por la truncadura de vértices del dodecaedro regular convexo a la distancia "$x = \frac{1}{10} \times (5 - \sqrt{5})\, a_{12}$".

El valor de "x" se deduce de las consideraciones geo-

UNE A4 210 x 297

Tavárez   Noviembre 1980



métricas siguientes, cuando el plano secante produzca:

a) En las caras del dodecaedro generador, polígonos regulares convexos de doble número de lados que los de las mencionadas caras (decágonos regulares), cuyos lados son alternativamente coincidentes con los de las mismas, y cuyo número será, por consiguiente, el de caras del dodecaedro generador ($12\ C_{10}$).

b) En los ángulos sólidos de los vértices, polígonos regulares convexos de tantos lados como caras concurren en los vértices de dichos ángulos sólidos (triángulos equiláteros) cuyo número será el de vértices del mencionado dodecaedro generador ($20\ C_3$), y situados en el plano secante.

Estas dos condiciones, aplicadas al caso propuesto, nos permite conocer las características del poliedro núcleo resultante de esta truncadura de vértices, y al mismo tiempo comprobar la posición del plano secante que la produce.

En efecto: Por la condición "a", el poliedro núcleo tendrá doce caras decagonales, regulares, convexas (C_{10}), situadas en las caras del dodecaedro generador, y

Por la condición "b", tendrá además veinte caras triangulares regulares (C_3) sobre el plano secante.



		Modelo M-41.5

Consecuentemente, el poliedro núcleo resultante de esta truncadura de vértices, tendrá las siguientes características geométricas:

1) Número de caras decagonales regulares $= 12\ C_{10}$

2) Número de caras triangulares regulares $= 20\ C_3$

3) Número de vértices $= \frac{12 \times 10 + 20 \times 3}{3} = 60\ V$

4) Número de aristas $= \frac{12 \times 10 + 20 \times 3}{2} = 90\ A$

5) Número de caras en cada vértice $= 1\,C_3 + 2\,C_{10}$

En consecuencia, y a la vista de los resultados anteriores, se deduce que el poliedro núcleo convexo, resultante de esta truncadura de vértices en el dodecaedro regular convexo, es un ARQUIMEDIANO IX estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº--- - Lámina 41.

Vamos a proceder a continuación al cálculo analítico previo de las magnitudes necesarias para la construcción de este modelo M-41.5, en función del radio "r_{ec}^{12} = 110 mm (dato del problema).

CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

1) Arista a_{12} del dodecaedro generador

UNE A4 210 x 297

Eduardo Noviembre 1980

Su valor se obtiene de la fórmula " $r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} a_{12}$ ", deducida en el ejercicio G.E. nº...- Lámina 4.- Despejando en ella " a_{12} " tendremos:

$$\boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} \cdot r_{ec}^{12} = \frac{4(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{15 - 3} r_{ec}^{12} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}} \qquad (1)$$

---

2) Radio " r_{c-5} " de la circunferencia circunscrita al pentágono regular convexo de una de las caras del dodecaedro generador, de arista " $a_{12} = l_5$ "

Se obtiene de la fórmula " $r_{c-5} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} l_5$ ".- Ver fórmula (3) del ejercicio G.P. 1.400-44.- Sustituyendo en ella " l_5 " por " a_{12} ", por ser " $l_5 = a_{12}$ ", tendremos:

$$\boxed{r_{c-5} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} a_{12}} \qquad (2)$$

---

3) Radio " r_{i-5} " de la circunferencia inscrita al pentágono regular convexo de una de las caras del dodecaedro generador, de arista " $a_{12} = l_5$ "

Se obtiene de la fórmula " $r_{i-5} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} l_5$ ".- Ver fórmula (5) del ejercicio G.P. 1400-44.- Sustituyendo en ella " l_5 " por " a_{12} ", por ser " $l_5 = a_{12}$ ", tendremos:

UNE A4 210 x 297

Tawara Noviembre 1980



$$r_{i-5} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\; a_{12} \qquad (3)$$

En la figura 1 representamos el pentágono regular convexo ABCDE, de una de las caras del dodecaedro generador de arista "a_{12}", en la que acotamos las magnitudes (1), (2) y (3).

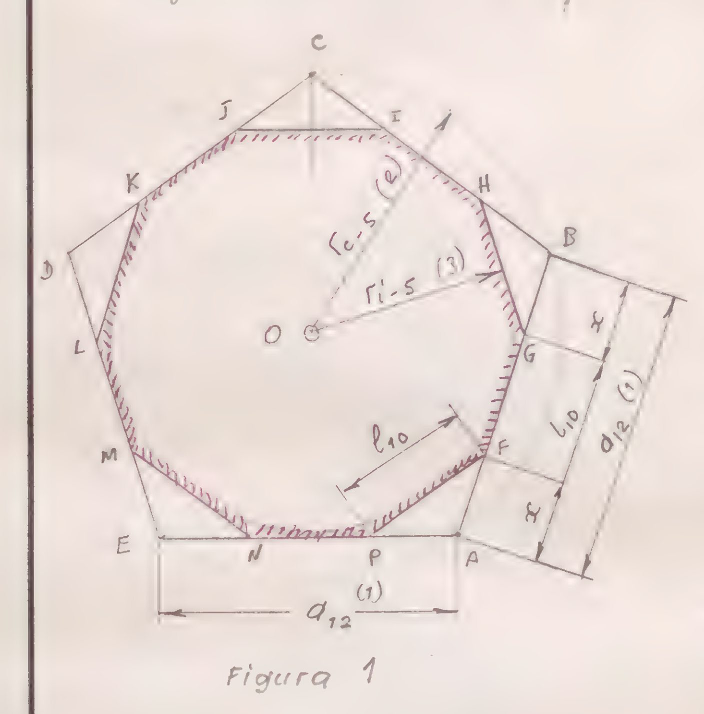


Figura 1

Para que el plano secante de la truncadura de vértices produzca en las caras del dodecaedro generado un decágono regular convexo (condición a), hoja 2), el centro "O" de éste ha de ser coincidente con el del pentágono ABCDE y por consiguiente han de tener coincidentes sus respectivas circunferencias inscritas. Esta condición nos permite calcular el lado $l_{10} = \overline{FG} = \overline{PF}$, y la distancia "$x = \overline{AF} = \overline{GB}$" de la truncadura de vértices, que realizamos a continuación.

4) Radio "r_{i-10}" de la circunferencia inscrita en el decágono regular convexo de lado l_{10}



Se obtiene por la fórmula (2) del ejercicio G.P. 1400-47; su valor es:

$$r_{i-10} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}\, l_{10} \qquad (4)$$

5) Lado "l_{10}" del decágono regular convexo FGH--- MNP (figura 1)

Según se ha indicado anteriormente, ha de ser

$$r_{i-5} = r_{i-10}$$

por lo que teniendo en cuenta los valores (3) y (4), tendremos:

$$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\, a_{12} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}\, l_{10}$$

y despejando en ésta l_{10}, tendremos:

$$l_{10} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\, a_{12} : \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} : \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2} \right) a_{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}\, a_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}}\, a_{12} = \frac{\sqrt{5}}{5}\, a_{12} \qquad (5)$$

6) Arista "a_{IX}" del poliedro núcleo ARQUIMEDIANO IX

Siendo $l_{10} = a_{IX}$, tendremos directamente

$$a_{IX} = l_{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}\, a_{12} \qquad (6)$$

UNE A4 210 x 297



en la que sustituyendo "a_{12}" por su valor (1), tendremos:

$$\boxed{a_{IX}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\, a_{12} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\, r_{ee}^{12} = \frac{\sqrt{75} - \sqrt{15}}{15}\, r_{ee}^{12} =$$

$$= \boxed{\frac{5\sqrt{3} - \sqrt{15}}{15}\, r_{ee}^{12}} \qquad (7)$$

---

7) Distancia "x" de la truncadura de vértices.

De la figura 1, se deduce:

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FG} + \overline{GB}$ de donde

$a_{12} = x + l_{10} + x = 2x + l_{10}$ y de aquí

$l_{10} = a_{12} - 2x$, valor que sustituido en (5), nos dará:

$a_{12} - 2x = \frac{\sqrt{5}}{5}\, a_{12}$ y despejando "x", será

$2x = a_{12} - \frac{\sqrt{5}}{5}\, a_{12} = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) a_{12} = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}\, a_{12}$ de donde

$$\boxed{x} = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}\, a_{12} : 2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}\, a_{12} = \boxed{\frac{1}{10} \times (5 - \sqrt{5})\, a_{12}} \qquad (7)$$

Valor que justifica el enunciado de este ejercicio.

Las fórmulas anteriores aplicadas al modelo estudiado en el que $r_{ee}^{12} = 110$ mm, nos dan los siguientes resultados numéricos:

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-41.5

1) Arista "a_{12}" del dodecaedro generador (fórmula (1)

$$\boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ee}^{12} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} \times 110 \cong 0{,}71\ 36\ 44\ 17\ 9\ldots \times 110 \cong \boxed{78{,}5 \text{ mm}}$$

2) Arista a_{IX} del Arquimediano IX (fórmula (7)

$$\boxed{a_{IX}} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{15}\, r_{ee}^{12} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{15}\, r_{ee}^{12} \cong 0{,}31\ 91\ 51\ 38\ 0\ldots \times 110 \cong \boxed{35{,}1 \text{ mm}}$$

3) Radio "r_{i-10}" de la circunferencia inscrita en el decágono regular convexo de lado $l_{10} = a_{IX}$. (fórmulas (4) y (7)

$$\boxed{r_{i-10}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l_{10} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \times \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{15}\, r_{ee}^{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, r_{ee}^{12} =$$

$$\cong 0{,}49\ 11\ 23\ 47\ 3\ldots \times 110 \cong \boxed{54{,}0 \text{ mm}}$$

4) Radio "r_{c-10}" de la circunferencia circunscrita al decágono regular convexo de lado "$l_{10} = a_{IX}$" (fórm. 7)

$$\boxed{r_{c-10}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{15}\, r_{ee}^{12} = \frac{2\sqrt{15}}{15}\, r_{ee}^{12} \cong$$

$$\cong 0{,}51\ 63\ 97\ 78\ 0\ldots \times 110 \cong \boxed{56{,}8 \text{ mm}} \qquad (9)$$

Los valores numéricos anteriores nos permiten efectuar la construcción del modelo propuesto, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

A) ARQUIMEDIANO IX, GENERADO DE CARAS MACIZAS

UNE A4 210 x 297

Alvarez Noviembre 1980



		Modelo M-01.5

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

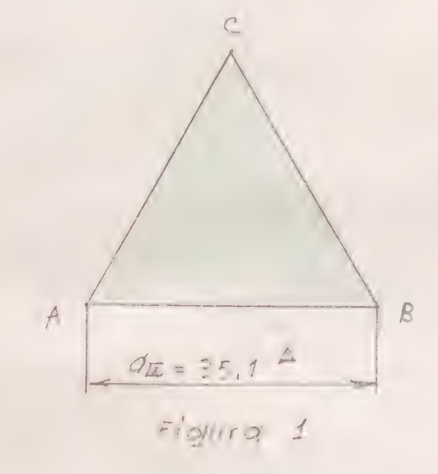


Figura 1

PIEZA Nº 1

20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES DECAGONALES REGULARES

12 unidades

AB = BC = CD = DE = EF = ... = IJ = JA = 35,1 mm.

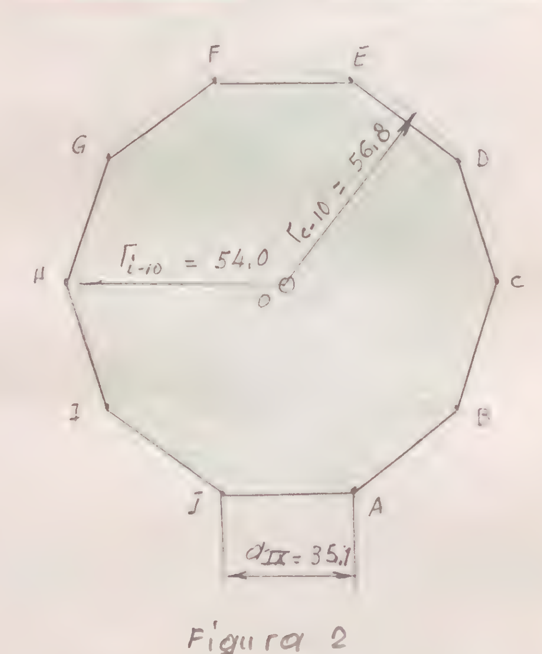


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2

12 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo equilátero ABC de la figura nº 1, y se detallan en la figura 3.

UNE A4 210 x 297



Modelo M-41.5

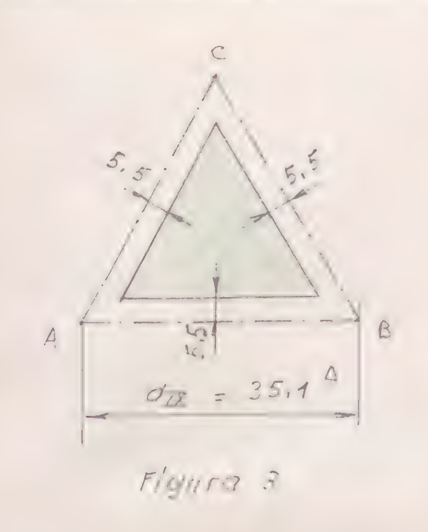


Figura 3

PIEZA Nº 3 20 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS DECAGONALES REGULARES 12 unidades

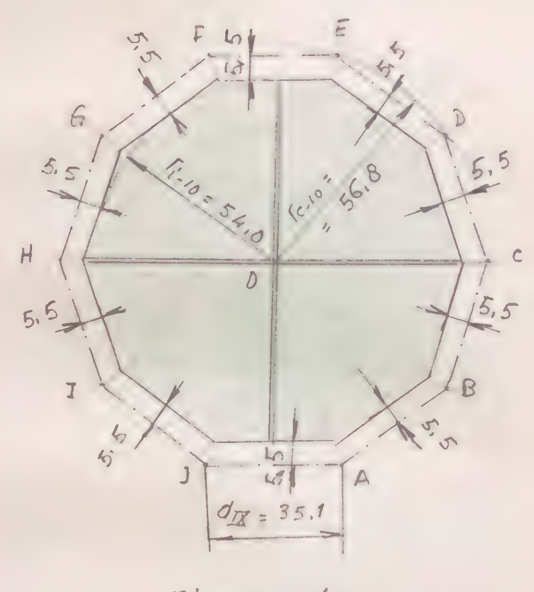


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen del decágono regular convexo ABC... HIJ de la figura 3, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS DECAGONALES REGULARES 48 unidades

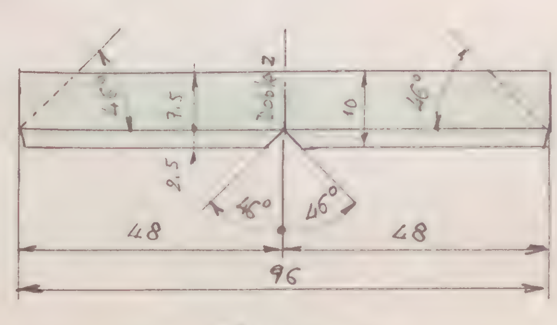


Figura 5

La forma y dimensiones, se detallan en la figura 5; su colocación en la figura 4

PIEZA Nº5 48 (u)

Figura 5

UNE A4 210 x 297

Noviembre 1980



Modelo M- 41.5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS DECAGONALES

30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

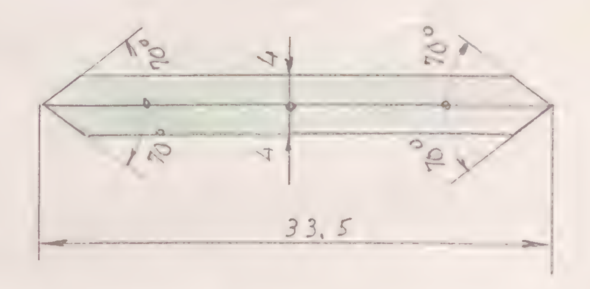


Figura 6

PIEZA Nº 6 30 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR Y OTRA DECAGONAL

60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

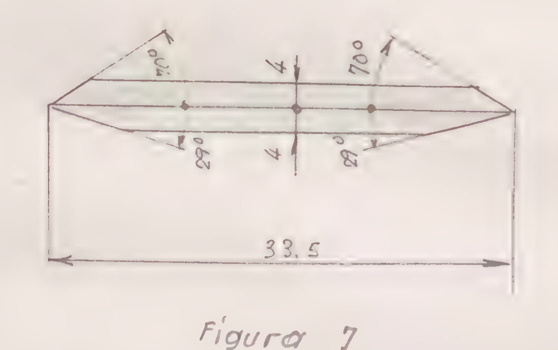


Figura 7

PIEZA Nº 7 60 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

20 unidades

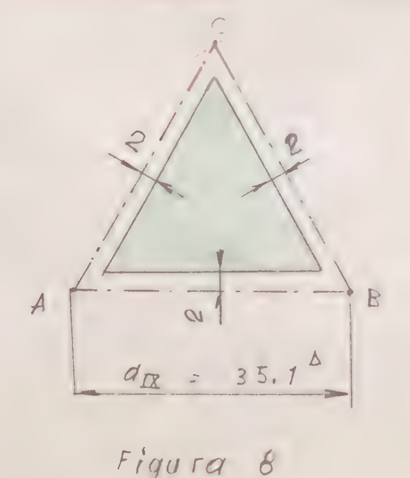


Figura 8

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 8 20 (u)

Figura 8

[firma] Noviembre 1980.



PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS DECAGONALES

12 unidades

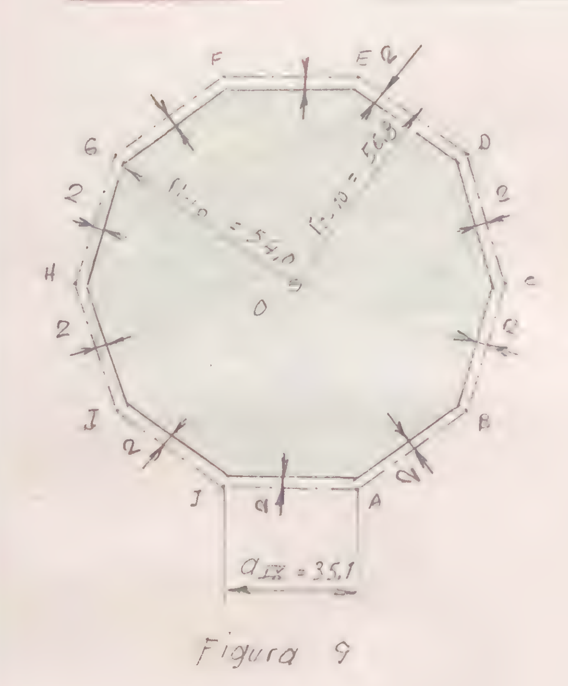


Figura 9

La forma y dimensiones se deducen de las del decágono ABC ... JIA de la figura 2, y se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 9 12 (u)

Figura 9

B) DODECAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

Queda reducido a veinte pirámides triangulares, rectas, regulares, cuyo desarrollo lateral es el siguiente:

PIEZA Nº 10 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES TRIANGULARES

20 unidades

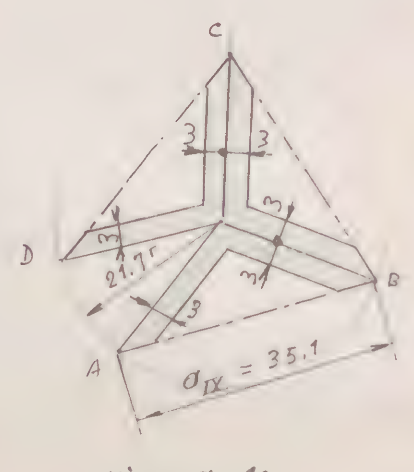


Figura 10

La forma y dimensiones se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 10

20 (u)

Figura 10

UNE A4 210 x 297

Noviembre 1980



Modelo M- 41.5

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 60 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 11

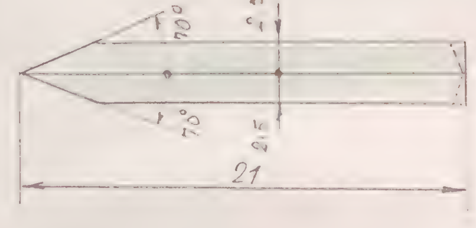


Figura 11

PIEZA Nº 11 60 (u)

Figura 11

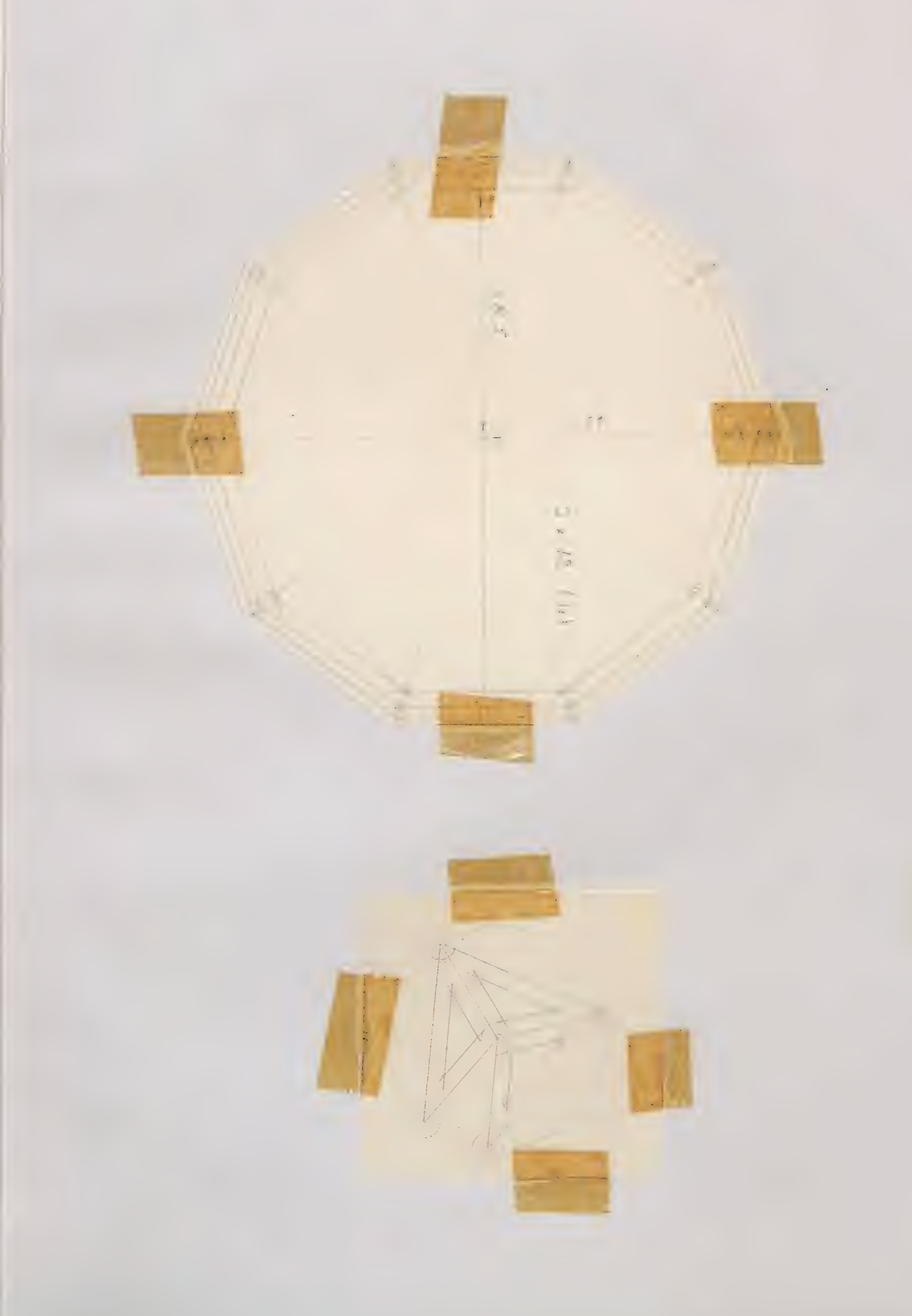
UNE A4 210 x 297

Noviembre 1980



MODELO M-41-5

PATRONES



VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M- 41.5, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, DOCE PIRÁMIDES RECTAS, REGULARES, DECAGONALES, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS DECAGONALES DEL ARQUIMEDIANO IX GENERADO, Y POR VÉRTICES, LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL DODECAEDRO GENERADOR, DE LOS CENTROS DE LAS CARAS DECAGONALES, DESDE EL CENTRO DEL POLIEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{ec}^{12} = 110$ mm.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-41.5, doce pirámides rectas, regulares, decagonales, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras decagonales del ARQUIMEDIANO IX generado, y por vértices, las proyecciones, sobre la esfera circunscrita al dodecaedro generador, de los centros de las caras decagonales, desde el centro "O" del poliedro generador.

Como se deduce de este enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-41.5, al cual ha de añadírsele doce pirámides rectas, regulares, decagonales, y de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación.

La altura "h_{10}" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita al dodecaedro regular convexo generador, y del radio "r_{ei}^{IX-10}" de la esfera tangente a las caras decagonales del Arquimediano IX generado. Así pues, tendremos:

$$h_{10} = r_{ec}^{12} - r_{ei}^{IX-10} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^{12}, se obtuvo en el ejercicio G. E. nº.....- Lámina 4, en función de la arista "a_{12}" del dodecaedro regular. Su valor es:

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} a_{12} \qquad (2)$$



El radio "r_{ei}^{IX-10}" de la esfera tangente a las caras decagonales del Arquimediano IX, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº---- Lámina 41. Su valor, en función de su arista "a_{IX}", es:

$$r_{ei}^{IX-12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}}\; a_{IX} \qquad (3)$$

y sustituyendo "a_{IX}" por su valor: "$a_{IX} = \frac{\sqrt{5}}{5}\, a_{12}$" ver fórmula (6) del ejercicio M-41.5, tendremos:

$$r_{ei}^{IX-12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}}\; a_{IX} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} \times \frac{\sqrt{5}}{5}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8} \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})\times 5}{8\times 25}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\; a_{12} \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_{10} = r_{ec}^{12} - r_{ei}^{IX-10} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, a_{12} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\; a_{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\right] a_{12} \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor "$a_{12} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}$", en función del radio r_{ec}^{12} de la esfera circunscrita al dodecaedro generador (ver fórmula (1) del modelo M-41.5), tendremos:

$$h_{10} = \left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\right] a_{12} = \left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\right] \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\right) r_{ec}^{12} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\right)^2}\right) r_{ec}^{12} =$$



Modelo M-41.6

$$= \left[\frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{4\times 3} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}\times\frac{15+3-2\sqrt{45}}{9}} \right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[\frac{15-3}{12} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}\times\frac{18-2\times 3\sqrt{5}}{9}} \right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[1 - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}\times\frac{18-6\sqrt{5}}{9}} \right] r_{ec}^{12} = \left(1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(18-6\sqrt{5})}{40\times 9}} \right) r_{ec}^{12} =$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{60}} \right) r_{ec}^{12} = \left(1 - \sqrt{\frac{75+33\sqrt{5}-25\sqrt{5}-55}{60}} \right) r_{ec}^{12} =$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{60}} \right) r_{ec}^{12} = \boxed{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) r_{ec}^{12}}$$

de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{h_{10} = \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) r_{ec}^{12}} \qquad (6)$$

Para obtener la longitud de la arista "a_{10}" de las pirámides decagonales, rectas, regulares, tendremos en cuenta que "a_{10}" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es "h_{10}", y el otro el radio "r_{c-10}" de la circunferencia circunscrita a la cara decagonal del Arquimediano IX. Así pues, será:

$$a_{10} = \sqrt{(h_{10})^2 + (r_{c-10})^2} \qquad (7)$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez Diciembre 1980



Modelo M- 41.6

El radio "r_{c-10}" de la circunferencia circunscrita al decágono regular de una cara, de lado $l_{10} = a_{IX}$ es (ver fórmula (1) G.P. 1.400-47)

$$r_{c-10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{IX} \qquad (8)$$

y siendo $a_{IX} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{15}\, r_{ec}^{12}$ (ver fórmula (7) del modelo M-41.5, valor que sustituido en (8), nos da:

$$\boxed{r_{c-10}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{IX} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{15}\, r_{ec}^{12} = \frac{(\sqrt{5}+1)\cdot(5\sqrt{3}-\sqrt{15})}{30}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{5\sqrt{15}+5\sqrt{3}-\sqrt{75}-\sqrt{15}}{30}\, r_{ec}^{12} = \frac{4\sqrt{15}+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{30} = \frac{4\sqrt{15}}{30}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \boxed{\frac{2\sqrt{15}}{15}\, r_{ec}^{12}}$$ (valor igual al de la fórmula (9), mod. M-41.5) (9)

Sustituyendo en (7) los valores (6) y (9), tendremos:

$$a_{10} = \sqrt{(h_{10})^2 + (r_{c-10})^2} = \sqrt{\left[\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{12}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}\, r_{ec}^{12}\right)^2\right.} =$$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{5+2\sqrt{5}}{15}\right)^2 + \frac{60}{15^2}}\; r_{ec}^{12} = \sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{4}{15}}\; r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{1+\frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{4}{15}}\; r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5+4+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{24+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12}$$

de donde se obtiene finalmente:

UNE A4 210 x 297

Calvarez Diciembre 1980



$$a_{10} = \sqrt{\frac{24+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12} \qquad (10)$$

Las fórmulas (7) del modelo M-41.5 y (10) de este modelo nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides rectas, decagonales, regulares, que se adicionan al modelo M-41.5, para obtener el que se estudia:

Para este caso particular de $r_{ec}^{12} = 110$ mm, será:

$$a_{IX} = \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{15}}{15}\, r_{ec}^{12} \cong 0,31\,91\,51\,38\,0\ldots \times 110 \cong 35,1 \text{ mm.}$$

$$a_{10} = \sqrt{\frac{24+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12} \cong 0,55\,57\,37\,85\,8\ldots \times 110 \cong 61.1 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO IX, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA $x = \frac{1}{10}(5-\sqrt{5})\, a_{12}$

Piezas 1 al 11, iguales a las del modelo M-41.5

B) PIRÁMIDES RECTAS, DECAGONALES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO M-41.5

Cavanas   Diciembre 1980



		Modelo M-41.6

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS 12 unidades.

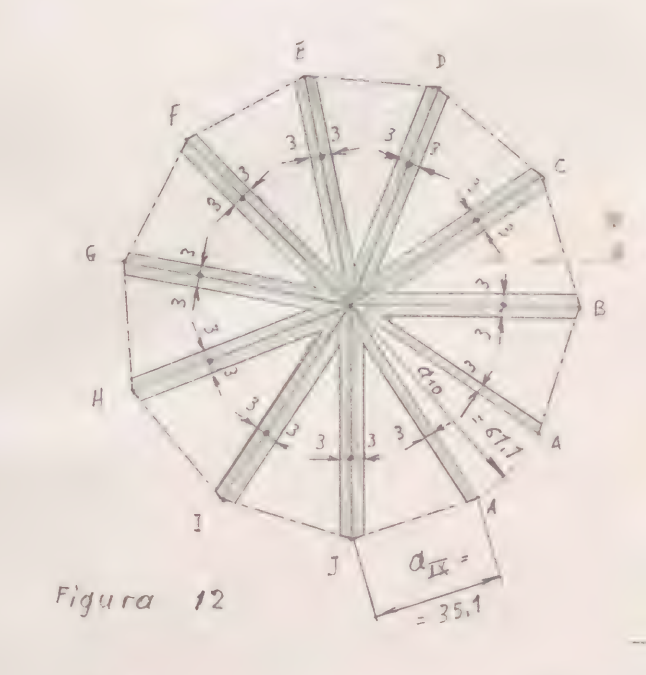


Figura 12

La forma y dimensiones se detallan en la figura 12.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} =$
$= \overline{HI} = \overline{IJ} = \overline{JA} = 35,1 \text{ mm} = a_{IX}$.

PIEZA Nº 12 12 (u)

Figura 12

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 120 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 13

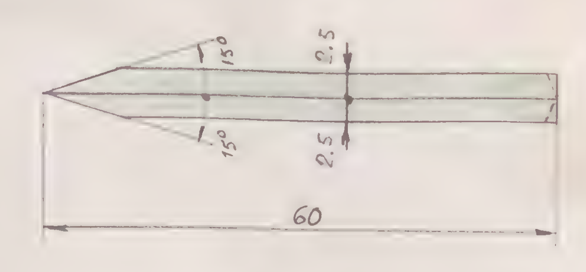


Figura 11

PIEZA Nº 13 120 (u)

Figura 11



MODELO M - 41. 6

Patrones



MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO IX" OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_{20}", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA $x = \frac{15 - \sqrt{5}}{22} a_{20}$.– EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL ICOSAEDRO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm.}$$

Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-41.7

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO IX", obtenido por truncadura de vértices de un icosaedro regular convexo, de arista "a_{10}", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, la distancia $x =$.- El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el icosaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{20} = Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

1) CONSIDERACIONES PREVIAS

El proceso geométrico denominado TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, en virtud del cual se obtienen varios de los POLIEDROS SEMIREGULARES CONVEXOS, denominados también POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, e igualmente pueden obtenerse también por dicho proceso los propios POLIEDROS REGULARES CONVEXOS, fué estudiado sistemáticamente y aplicado al TETRAEDRO REGULAR CONVEXO en los ejercicios M-39.1; M-39.5; M-39.7 y M-6.2.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1982



En dicho estudio se aprecia que las distintas posiciones del plano secante dan lugar a la obtención de un poliedro núcleo, de muy variadas formas, dependientes de la posición del plano secante con respecto al tetraedro generador. La posición de dicho plano secante se fija por la condición de pasar por puntos situados a la distancia variable "x", sobre las aristas que concurren en cada vértice del mencionado tetraedro generador.

Entre las diversas posiciones del plano secante, existen algunas notables en las que el poliedro núcleo resultante, es un POLIEDRO ARQUIMEDIANO, o también un POLIEDRO REGULAR CONVEXO.

Dichas posiciones notables, estudiadas en el TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, se detallan resumidamente el el ejercicio M - 40.5. El proceso de obtención, aplicado en el tetraedro regular convexo, puede hacerse extensivo a los restantes poliedros regulares (exaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), obteniéndose también de ellos un poliedro núcleo, que puede ser POLIEDRO ARQUIMEDIANO, o también POLIEDRO REGULAR CONVEXO.

El modelo que estudiamos en este ejercicio, puede obtenerse del modelo M - 36.7, en el cual el poliedro núcleo obtenido por la TRUNCADURA DE VÉRTICES de un ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia $x = \frac{1}{2} a_{20}$, es el ARQUIMEDIANO IV, de arista $a_{IV} = \frac{1}{2} a_{20}$

		Modelo M- 41.7

Por consiguiente, si suponemos que el plano secante π_1 varía de la posición $x = \frac{1}{2} a_{20}$, alejándose progresivamente del vértice correspondiente, dicho plano secante dará lugar a la formación de un poliedro núcleo irregular de las siguientes características geométricas:

a) El plano secante produce en las caras del icosaedro generador triángulos equiláteros, cuyos lados van disminuyendo de longitud a medida que crece la distancia " $x > \frac{1}{2} a_{20}$.

En efecto, sea (figura 1), ABC una cara triangular regular del icosaedro generador, de arista "a_{20}"; tomando, a partir de los vértices, distancias $x > \frac{1}{2} a_8$, obtendremos los puntos D, E, F, G, H, I, sobre los lados del triángulo ABC, que nos sitúan las rectas (o trazas) de intersección de los tres planos secantes con la considerada cara ABC.

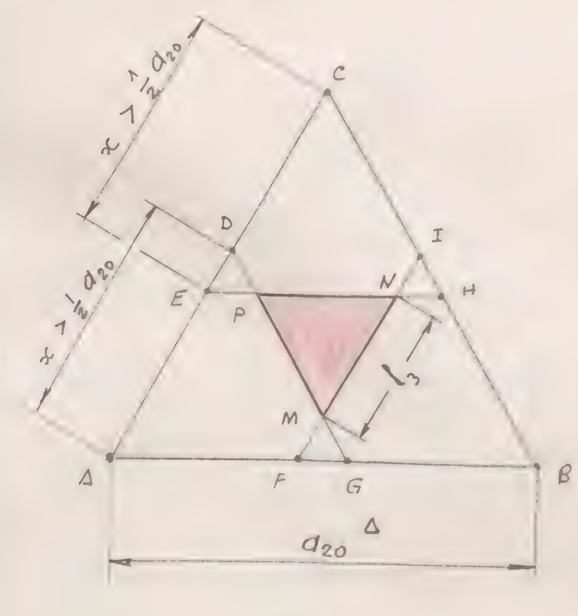


Figura 1

Las intersecciones de dichas trazas dan lugar a la formación del triángulo equilátero MNP, cara del poliedro núcleo de lado $\overline{MN} = l_3$.

De la figura 1, se deducen las siguientes relaciones métricas:

UNE A4 210 x 297



$\overline{AE} = \boxed{\overline{DC}} = \overline{AC} - \overline{EC} = \boxed{a_{20} - x}$ y también de ésta:

$\boxed{\overline{ED}} = \overline{EC} - \overline{DC} = x - (a_{20} - x) = \boxed{2x - a_{20}}$ mas siendo

$\overline{MI} = \overline{DC}$ y $\overline{NI} = \overline{ED}$ y también:

$\overline{MN} = \overline{MI} - \overline{NI} = \overline{DC} - \overline{ED} = \overline{EC} - \overline{ED} - \overline{ED} = \overline{EC} - 2\,\overline{ED}$,

por lo que será:

$\overline{MN} = \boxed{l_3} = x - 2 \times (2x - a_{20}) = x - 4x + 2a_{20} = \boxed{2a_{20} - 3x}$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{l_3 = 2\,a_{20} - 3\,x} \qquad (1)$$

fórmula que nos determina la longitud del lado "l_3" del triángulo equilátero MNP, en función de la distancia "x" (variable) de la truncadura de vértices del icosaedro generador, y de la arista a_{20} de éste.

b) Por otra parte, el plano secante de dicha truncadura, produce en los ángulos sólidos de los vértices del icosaedro generador, pentágonos de lado EH = x (ver figura 1) sobre los que se forman decágonos equiángulos PNQRSTUVXY (figura 2) cuyos lados alternativos $\overline{PN}$, $\overline{QR}$, $\overline{ST}$, $\overline{UV}$ $\overline{XY}$, son coincidentes con los lados de dichos pentágonos.



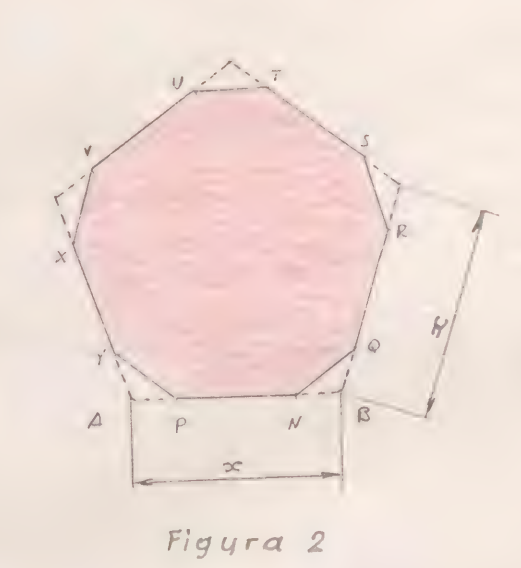


Figura 2

Los veinte triángulos equiláteros PNM (figura 1) y los doce decágonos equiángulos P, N, Q, ... R, S, T, U, V, X Y (figura 2), son los contornos de las caras que limitan al poliedro núcleo que se obtiene por truncadura de vértices del icosaedro regular generador, a la distancia "$x > \frac{1}{2} a_{20}$".

El decágono PNQRSTUVXY, no es, en general, un decágono regular, salvo en una posición "x" del plano secante en que esto se produzca.

Dicha posición será aquel valor de "x" en la que el plano secante produzca en el plano de las caras triángulos PNM (fig. 1) regulares (siempre ocurre esto para cualquier valor de "x") y al mismo tiempo los decágonos equiángulos PNQRSTUVXY (figura 2) sean a su vez regulares. En estas condiciones habrán de ser <u>iguales</u> las longitudes "l_3" y "l_{10}" de las respectivas secciones <u>triangulares</u> y <u>decagonales</u> ambas <u>regulares</u>.

En la fórmula (1), hemos ya deducido la magnitud del lado "l_3" del triángulo PNM (fig. 1), en función de "x" y de "a_{20}". Hagamos lo mismo con el decágono (fig. 2), e igualemos seguidamente los resultados para obtener ese valor particular de "x" que nos resuelva el problema planteado.

Sea (fig. 2) $\overline{PN} = l_{10}$ = (lado del decágono) y AB = x = (lado del pentágono que se obtiene por la truncadura de vértices del icosaedro generador a la distancia "x")

La relación entre l_{10} y x ha sido deducida en la fórmula (5) del ejercicio M-41.5. Su valor es:

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}\, x \qquad (2)$$

Igualando los valores (1) y (2), tendremos la ecuación

$$2\, a_{20} - 3x = \frac{\sqrt{5}}{5}\, x$$ en la que despejaremos "x".

$$2a_{20} - 3x = \frac{\sqrt{5}}{5}\, x\ ; \qquad 2a_{20} = \frac{\sqrt{5}}{5}\, x + 3x = \left(\frac{\sqrt{5}}{5} + 3\right) x = \frac{15 + \sqrt{5}}{5}\, x\ ;$$

de donde $$x = 2\, a_{20} : \frac{15 + \sqrt{5}}{5} = \frac{10}{15 + \sqrt{5}}\, a_{20} = \frac{10\,(15 - \sqrt{5})}{15^2 - 5}\, a_{20} =$$

$$= \frac{10\,(15 - \sqrt{5})}{220}\, a_{20} = \frac{15 - \sqrt{5}}{22}\, a_{20}$$ de donde se obtiene finalmente:

$$x = \frac{15 - \sqrt{5}}{22}\, a_{20} \qquad (3)$$

La ecuación (3) nos demuestra que la truncadura de vértices de un icosaedro regular convexo de arista "a_{20}", a la distancia "$x = \frac{15 - \sqrt{5}}{22} a_{20}$", da lugar a la formación de un poliedro núcleo, semiregular, convexo, compuesto de veinte caras triangulares regulares (ver características a) y de doce caras pentagonales regulares (ver



características b), o sea que dicho poliedro núcleo es un "ARQUIMEDIANO IX" estudiado en el ejercicio G.E. nº... -Lámina 41.

Las características geométricas del Arquimediano IX, son las siguientes:

1) · Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
2) Número de caras decagonales	$C_{10} = 12$
3) Número de vértices $= \frac{20 \times 3 + 12 \times 10}{3}$	$V = 60$
4) Número de aristas $= \frac{20 \times 3 + 12 \times 10}{2}$	$A = 90$
5) Numero de caras en cada vértice =	$1 C_3 + 2 C_{10}$

La longitud de la arista "$a_{IX} = l_3 = l_{10}$", se obtiene sustituyendo en (1) o en (2) el valor de (3).- Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_{IX}} = 2\,a_{20} - 3x = 2\,a_{20} - 3 \times \frac{15-\sqrt{5}}{22}\,a_{20} = \left(2 - \frac{3(15-\sqrt{5})}{22}\right) a_{20} =$$

$$= \frac{44 - 45 + 3\sqrt{5}}{22}\,a_{20} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}-1}{22}\,a_{20}} \qquad (4)$$

fórmula que nos da la magnitud de la arista "a_{IX}" del Arquimediano IX generado, en función de la arista "a_{20}" del icosaedro generador.



Como resumen de lo expuesto anteriormente establecemos la siguiente proposición que justifica el enunciado dado en este modelo

El poliedro obtenido por la TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia "$x = \frac{15-\sqrt{5}}{22} a_{20}$", es un ARQUIMEDIANO IX, de arista igual a "$a_{IX} = \frac{3\sqrt{5}-1}{22} a_{20}$"

---

2) CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES (en función de r_{ec}^{20})

2.1) Arista "a_{20}" del icosaedro regular convexo generador.

Se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a_{20}$" deducida en el ejercicio G.E. nº---- Lámina 5. Despejando en ella "a_{20}", tendremos:

$$\boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = \frac{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}} r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5+\sqrt{5}} r_{ec}^{20} = 2\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})^2}} r_{ec}^{20} = 2\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = 2\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{20}} r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20}} \qquad (5)$$

UNE A4 210 x 297



Modelo M - 41.9

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(230-30\sqrt{5})}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{(5-\sqrt{5})(23-3\sqrt{5})}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{115-23\sqrt{5}-15\sqrt{5}+15}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{130-38\sqrt{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{11}\sqrt{2\cdot(65-19\sqrt{5})}\, r_{ec}^{20}} \qquad (7)$$

2.4) Radio "r_{cc}^{10}" de la circunferencia circunscrita al decágono regular de una cara "C_{10}" del Arquimediano IX, de arista "$a_{IX} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{2(65-19\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20}$".

Se obtiene de la fórmula "$r_{cc}^{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} l_{10}$", obtenida en el ejercicio G.P. 1.400-47 (1), haciendo $l_{10} = a_{IX} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{2(65-19\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20}$

$$\boxed{r_{cc}^{10}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} l_{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{1}{11}\sqrt{\frac{2(65-19\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{22}\sqrt{\frac{2\cdot(65-19\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)^2}{5}}\, r_{ec}^{20}$$

$$= \frac{1}{22}\sqrt{\frac{2\cdot(65-19\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{22}\sqrt{\frac{2\times 2\times(65-19\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{2}{22}\sqrt{\frac{195-57\sqrt{5}+65\sqrt{5}-95}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{100+8\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{4\cdot(25+2\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{2}{11}\sqrt{\frac{25+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (8)$$

2.5) Radio "r_{ei}^{IX-10}" de la esfera tangente a las caras decagonales del ARQUIMEDIANO IX generado

(sigue)

Alvarez Marzo 1982

UNE A4 210 x 297



Dicho radio se obtuvo, en función de a_{IX}, en el ejercicio G.E. nº ---- Lámina 41. Su valor es " $r_{ei}^{IX-10} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}}\, a_{IX}$ ".

Sustituyendo en ella a_{IX} por su valor obtenido en (6), tendremos

$$\boxed{r_{ei}^{IX-10}} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} \times \frac{1}{11}\sqrt{\frac{2\times(65-19\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}\times\frac{2\times(65-19\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(65-19\sqrt{5})}{20}}\; r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{1625+715\sqrt{5}-475\sqrt{5}-1045}{20}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{580+240\sqrt{5}}{20}}\; r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{29+12\sqrt{5}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Por ser}\\ 29^2 = 841\\ (12\sqrt{5})^2 = -720\\ \hline \quad 121 = 11^2\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{11}\left(\sqrt{\frac{29+11}{2}} + \sqrt{\frac{29-11}{2}}\right) r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\left(\sqrt{20}+\sqrt{9}\right) r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}+3}{11}\, r_{ec}^{20}} \qquad (9)$$

2.6) Altura "h_{10}" de las pirámides auxiliares, rectas, decagonales regulares.

Se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al icosaedro generador (dato del ejercicio), y del radio r_{ei}^{IX-10} (fórmula 9).- Así pues, será:

$$\boxed{h_{10}} = r_{ec}^{20} - \frac{2\sqrt{5}+3}{11}\, r_{ec}^{20} = \left(1 - \frac{2\sqrt{5}+3}{11}\right) r_{ec}^{20} = \frac{11-2\sqrt{5}-3}{11}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{\frac{8-2\sqrt{5}}{11}\, r_{ec}^{20}} \qquad (10)$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1982



2.7) Arista "a'_{10}" de las pirámides auxiliares, rectas, decagonales.

Su valor es el de la hipotenusa de un triángulo rectangulo, siendo sus catetos: Uno, la altura "$h_{10} = \frac{8-2\sqrt{5}}{11} r_{ec}^{20}$", (fórmula (10), y el otro, el radio "$r_{cc}^{10} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{25+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}$ (ver fórmula (8).- Así pues, será:

$$\boxed{a'_{10}} = \sqrt{(h_{10})^2 + (r_{cc}^{10})^2} = \sqrt{\left(\frac{8-2\sqrt{5}}{11} r_{ec}^{20}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\sqrt{\frac{25+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8-2\sqrt{5}}{11}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\sqrt{\frac{25+2\sqrt{5}}{5}}\right)^2}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{5\times(8-2\sqrt{5})^2 + 4\times(25+2\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{(8-2\sqrt{5})^2 + \frac{4\times(25+2\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{5\times(8-2\sqrt{5})^2 + 4\times(25+2\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{5\times(64+20-32\sqrt{5}) + 100 + 8\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{5\times(84-32\sqrt{5}) + 100 + 8\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{420-160\sqrt{5} + 100 + 8\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{520-152\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{11}\sqrt{\frac{8\times(65-19\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{2}{11}\sqrt{\frac{2\times(65-19\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (11)$$

Las magnitudes necesarias para la construcción de este modelo, se deducen de las fórmulas (5), (6), (11) y (8).

Para $r_{ec}^{20} = 110$ mm, sus valores numérico son:

UNE A4 210 x 297

a) Arista "a_{20}" (fórmula 5)

$$\boxed{a_{20}} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \cong 1,05\ 14\ 62\ 22\ 4\ldots \times 110 \cong \boxed{115.7\ mm}$$

b) Arista "a'_{10}" (fórmula 11)

$$\boxed{a'_{10}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{2\times(65-19\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} = 0,54\ 56\ 32\ 80\ 0\ldots \times 110 = \boxed{60,0\ mm}$$

c) Arista "a_{IX}" (fórmula 8)

$$\boxed{a_{IX}} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{2\times(65-19\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} \cong 0,27\ 28\ 26\ 40\ 0\ldots \times 110 \cong \boxed{30.0\ mm}$$

d) Radio "r_{cc}^{10}" (fórmula 8)

$$\boxed{r_{cc}^{10}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{25+2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} \cong 0,44\ 14\ 26\ 20\ 8\ldots \times 110 \cong \boxed{48.6\ mm}$$

NOTA.- Comparando los resultados anteriores, obsérvese la siguiente relación: "$a'_{10} = 2\,a_{IX}$"

3). CONSTRUCCIÓN DEL MODELO CORPÓREO

Para la construcción del presente modelo, son necesarias las siguientes piezas. en

A) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE CARAS VACIADAS.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1982



PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 20 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M - 5.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M - 5.102

B) ARQUIMEDIANO IX GENERADO, DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES. 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

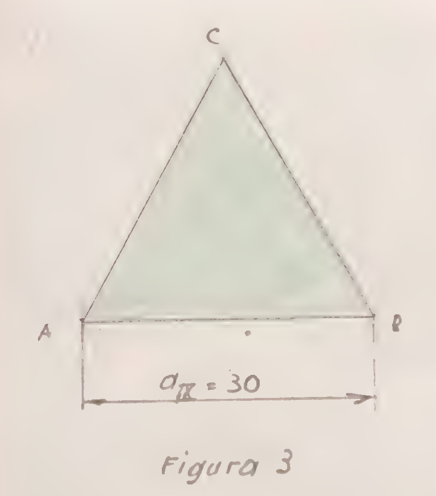


Figura 3

PIEZA Nº 3

20 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES DECAGONALES REGULARES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4



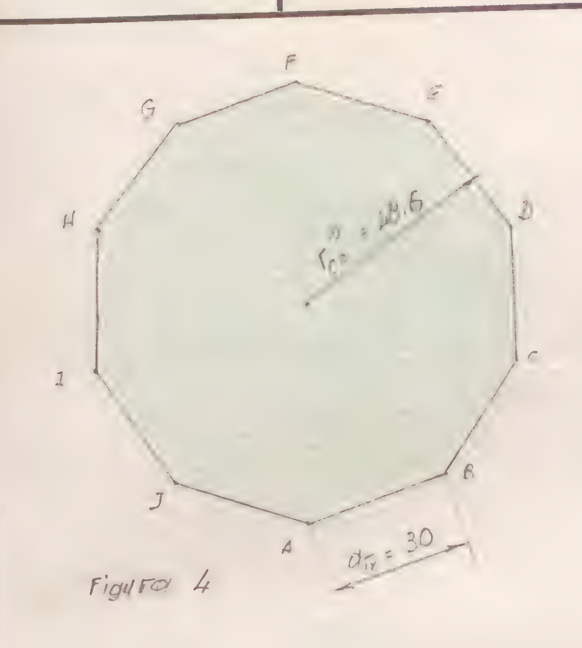


Figura 4

AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI =

= IJ = JA = 30 mm

$r_{cc}^{10} = 1,618 \times 30 \cong 48,6$ mm

PIEZA Nº 4 — 12 unidades

Figura 4

PIEZA Nº 5 — REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES — 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3, y se detallan en la figura 5

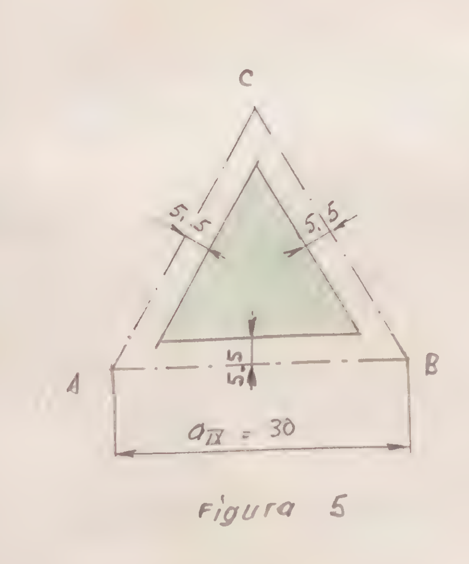


Figura 5

PIEZA Nº 5 — 20 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 — REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES DECAGONALES REGULARES — 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del decágono ABC... IJA de la figura nº 4, y se detallan en la figura 6

UNE A4 210 x 297

Calvarez Marzo 1982

Modelo M-21.7

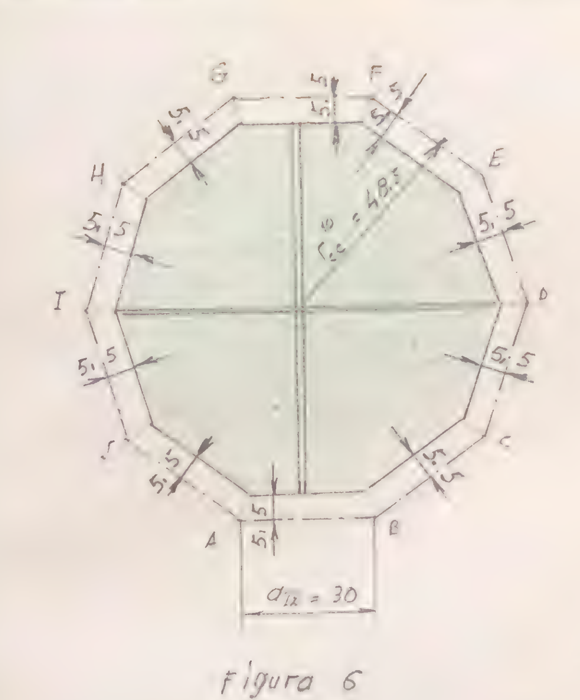


Figura 6

PIEZA Nº 6

12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES REGULARES 48 unidades

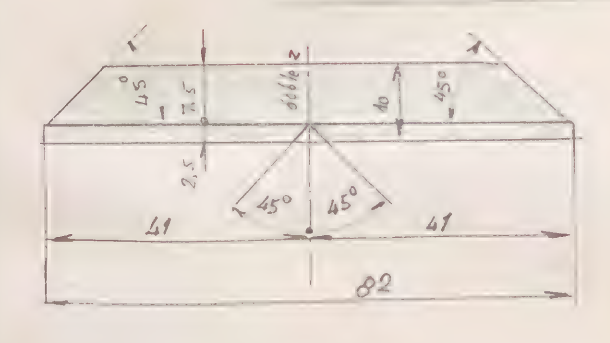


Figura 7

La forma y dimensiones se detallan en la figura 7

PIEZA Nº 7 48 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 90 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 8

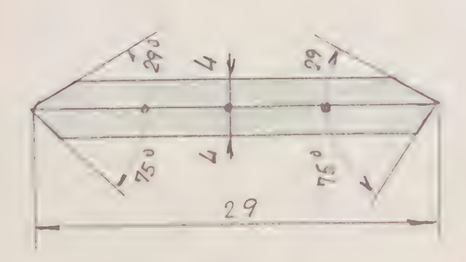


Figura 8

PIEZA Nº 8

90 (u)

Figura 8

UNE A4 210 x 297

Marzo 1982

PIEZA Nº 9 — FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3, y se detallan en la figura 9.

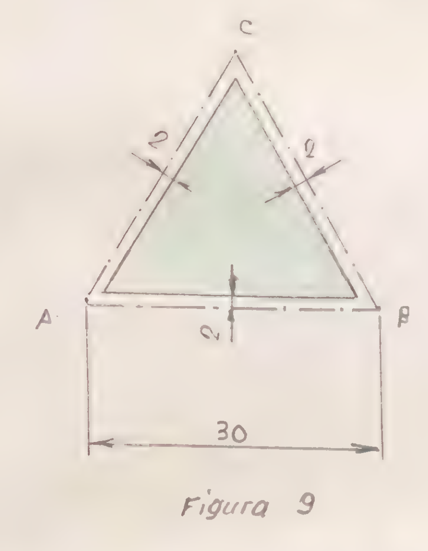


Figura 9

PIEZA Nº 9

20 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 10 — FORRO COLOREADO EN CARAS DECAGONALES

12 unidades

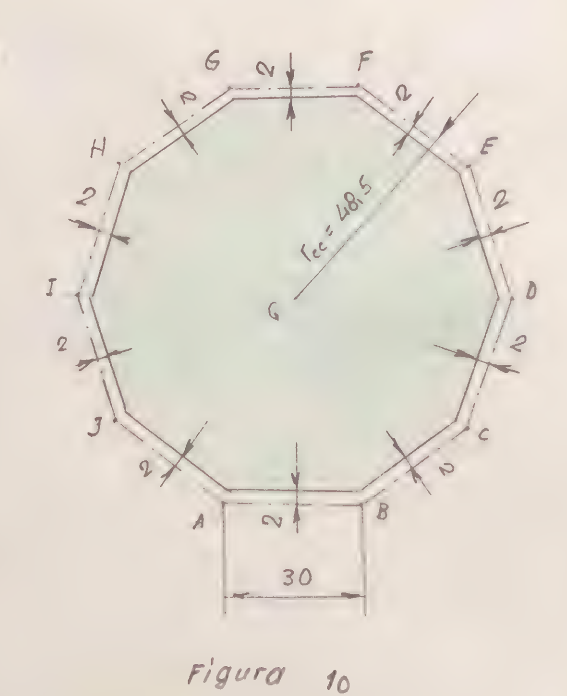


Figura 10

Su forma y dimensiones se deducen de las del decágono ABC... IJA de la figura 4, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 10

12 (u)

Figura 10

Marzo 1982

UNE A4 210 x 297

c) PIRÁMIDES AUXILIARES REGULARES, DECAGONALES, DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 11 DESARROLLO LATERAL 12 unidades

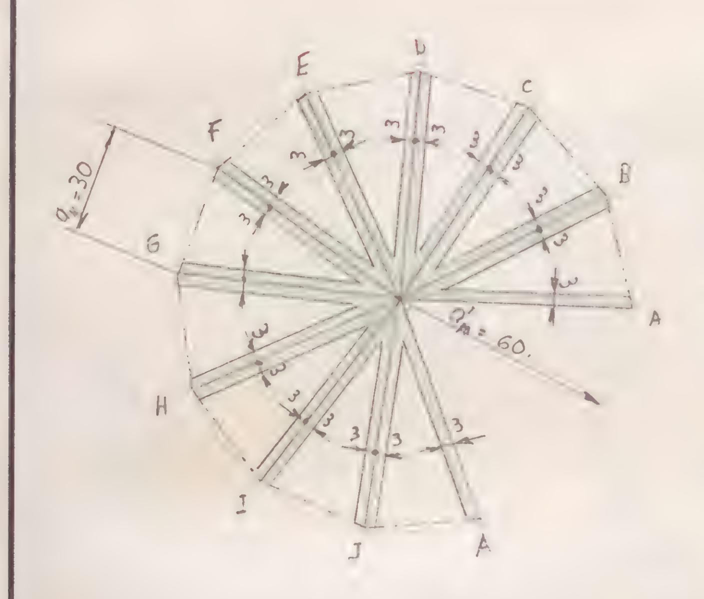


Figura 11

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

$AB = BC = CD = \ldots = IJ = JA =$

$a_{IX} = 30$ mm

$a'_{10} = 60$ mm

PIEZA Nº 11 12 (u)

Figura 11

PIEZA Nº 12 UNIONES ARISTAS 120 unidades

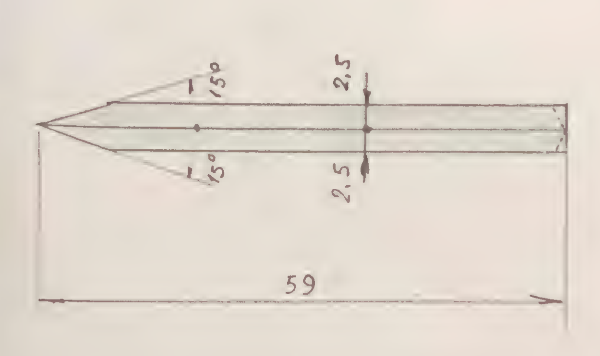


Figura 12

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

PIEZA Nº 12

120 (u)

Figura 12



MODELO M- 41,7 Patrones



valores comprobados

$$x = \frac{1}{11}\sqrt{2(65-19\sqrt{5})}\; r_{ec}^{20} \cong 0{,}61\ 00\ 36\ 01\ 6\ldots \times 110 \cong 67.1 \text{ mm}$$

$$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \cong 1.05\ 14\ 62\ 22\ 4\ldots \times 110 \cong 115.7 \text{ mm}$$

$$a_{1X} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{2\cdot(65-19\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} \cong 0{,}27\ 28\ 16\ 40\ 0 \times 110 \cong 30.0 \text{ mm}$$

$$r_{ec}^{10} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{25+2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} \cong 0{,}44\ 14\ 26\ 20\ 8\ldots \times 110 \cong 48.6 \text{ mm}$$

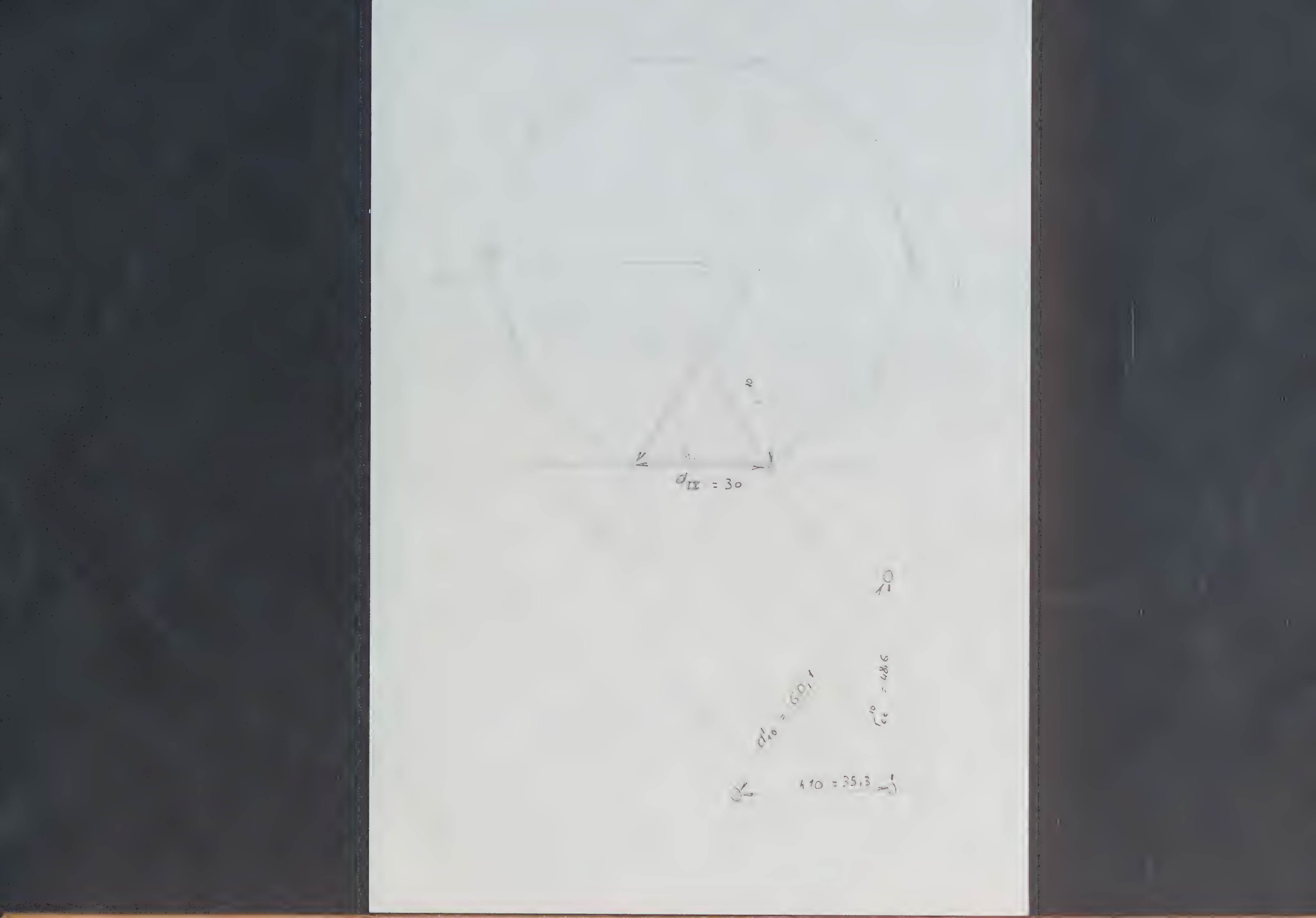
$$r_{ei}^{1X-10} = \frac{2\sqrt{5}+3}{11}\; r_{ec}^{2} \cong 0{,}67\ 92\ 85\ 08\ 7\ldots \times 110 \cong 74.7 \text{ mm}$$

$$h_{10} = \frac{8-2\sqrt{5}}{11}\; r_{ec}^{2} \cong 0.32\ 07\ 14\ 91\ 3\ldots \times 110 \cong 35.3 \text{ mm}$$

$$a'_{10} = \sqrt{35{,}3^2 + 48{,}6^2} = 60{,}07$$

$$a'_{10} = \frac{2}{11} \times \sqrt{\frac{2\times(65-19\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} \cong 0{,}54\ 56\ 32\ 80\ 0\ldots \times 110 \cong 60{,}02 \text{ mm} = 60{,}0 \text{ mm}$$

(ver dibujo al dorso)


d_IX = 30
d'_10 = 60,1
r^10_cc = 48,6
410 = 35,3

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO X", FORMADO POR SEIS CARAS CUADRADAS (C_4) Y OCHO CARAS EXAGONALES REGULARES (C_6), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1\,C_4 + 2\,C_6$.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO X" formado por seis caras cuadradas (C_4) y ocho caras exagonales (C_6), concurriendo en cada vértice $1\,C_4 + 2\,C_6$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G.E. nº.... Lámina 42, y representado en sus vistas principal, superior y lateral izquierda en la mencionada Lámina 42, a escala 1:1, con el radio r_{ec}^{X} de su esfera circunscrita, de $r_{ec}^{X} = 55$ mm.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita

$$r_{ec}^{X} = 110 \text{ mm}$$

Las características geométricas del ARQUIMEDIANO X., son las siguientes:

Número de caras cuadradas $C_4 = 6$

Número de caras oxagonales regulares $C_6 = 8$

Número de vértices $= \dfrac{6\times 4 + 8\times 6}{3} =$ ——— $V = 24$

Número de aristas $= \dfrac{6\times 4 + 8\times 6}{2} =$ ——— $A = 36$

Número de caras de caras de un ángulo sólido = ——— $1\,C_4 + 2\,C_6$

Calvarro Octubre 1980



Para poder obtener el despiezo de este poliedro, calcularemos previamente la longitud "a_X" de la arista del mismo, en función del radio "r_{ec}^X" de su esfera circunscrita. Para ello utilizaremos la fórmula: "$r_{ec}^X = \frac{\sqrt{10}}{2} a_x$" deducida en el mencionado ejercicio G.E. nº.... - Lámina 42, que nos da el valor del radio de la esfera circunscrita en función de la arista a_x del Arquimediano X. Despejando en ella a_x, tendremos:

$$\boxed{a_x} = r_{ec}^x : \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{2}{\sqrt{10}} r_{ec}^x = \frac{2\sqrt{10}}{10} r_{ec}^x = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{5} r_{ec}^x} \quad (1)$$

Para el caso estudiado, tendremos ($r_{ec}^x = 110$ mm)

$$\boxed{a_x} = \frac{\sqrt{10}}{5} \times 110 \cong 0,63\ 24\ 55\ 53\ 2\ldots \times 110 \cong \boxed{69,6 \text{ mm}}$$

Esta sola magnitud nos permite la construcción del poliedro estudiado, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES CUADRADAS

6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A4 210 x 297

Octubre 1980



Modelo M-49.1

D C
A B
69.6 □

Figura 1

PIEZA Nº 1 6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES, REGULARES

8 unidades

E D
F C
A B
69.6

Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 8 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS

6 unidades

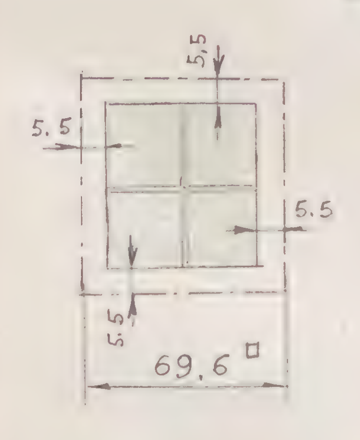


Figura 3

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 6 (u)

Figura 3

Octubre 1980



Modelo M-42.1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 8 unidades

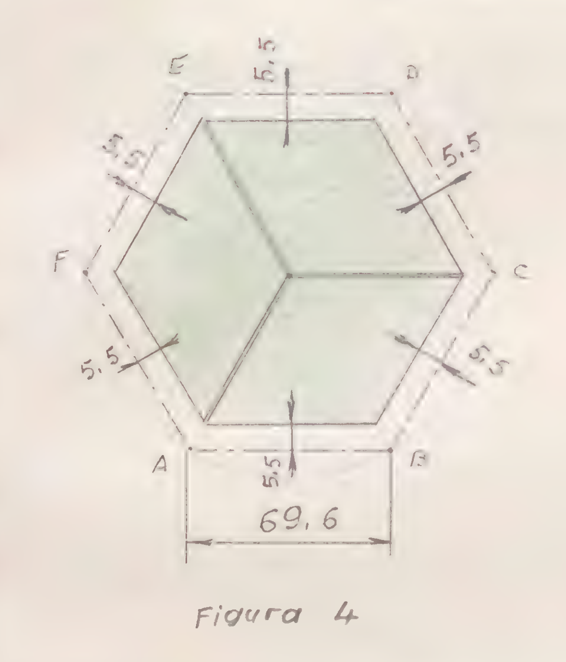


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 8 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES DE ARISTAS DE DOS CARAS EXAGONALES 12 unidades

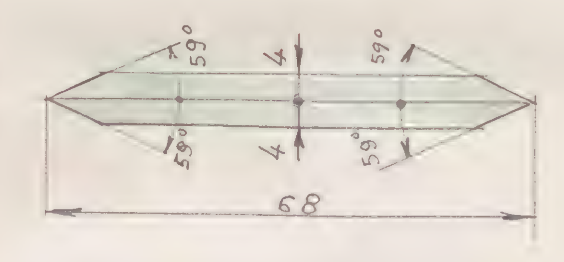


Figura 5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES DE ARISTAS DE UNA CARA EXAGONAL Y OTRA CUADRADA 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

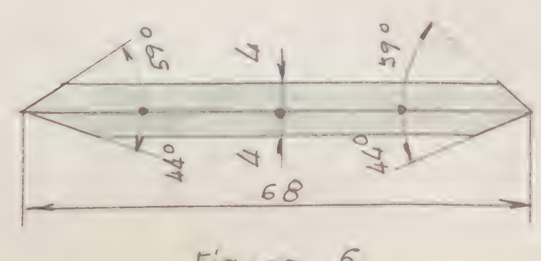


Figura 6

PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 6

UNE A4 210 x 297

Octubre 1980



PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS 24 unidades

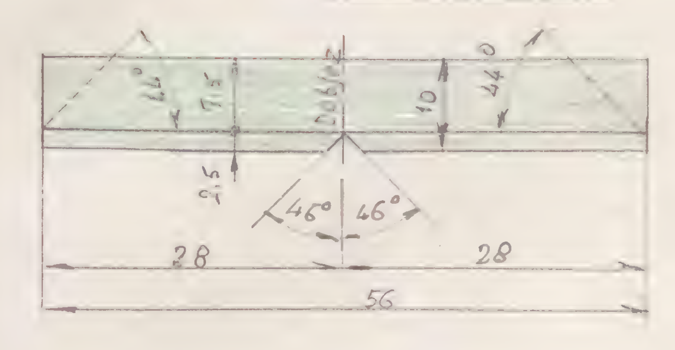


Figura 7

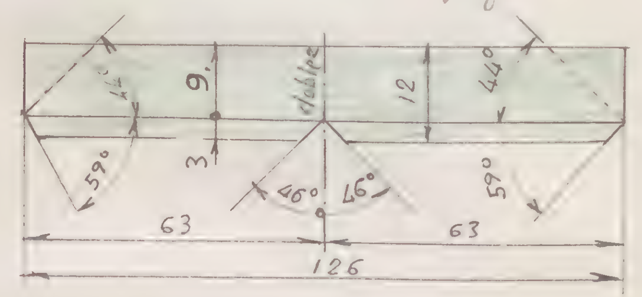
Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 3

PIEZA Nº 7 24(u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación en la figura 4,



PIEZA Nº 8 24 (u)

Figura 8

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9; y se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1

D C

2 2

2 2

A B

69.6 □

Figura 9

PIEZA Nº 9 6 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 8 unidades

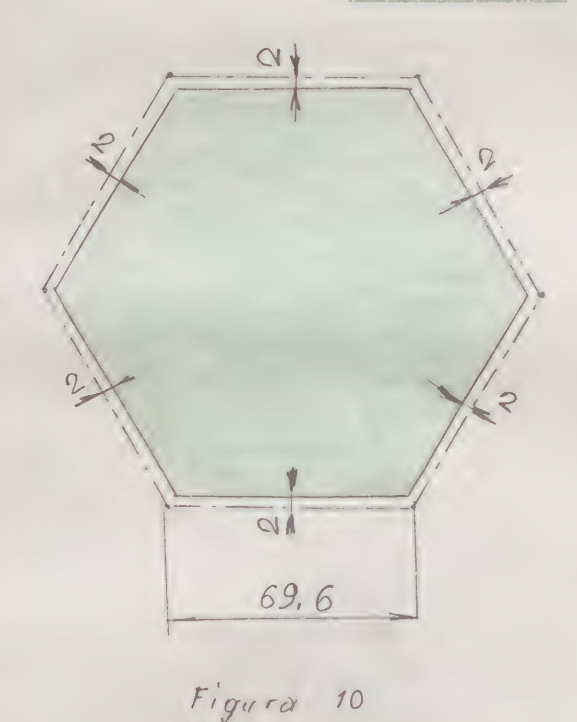


Figura 10

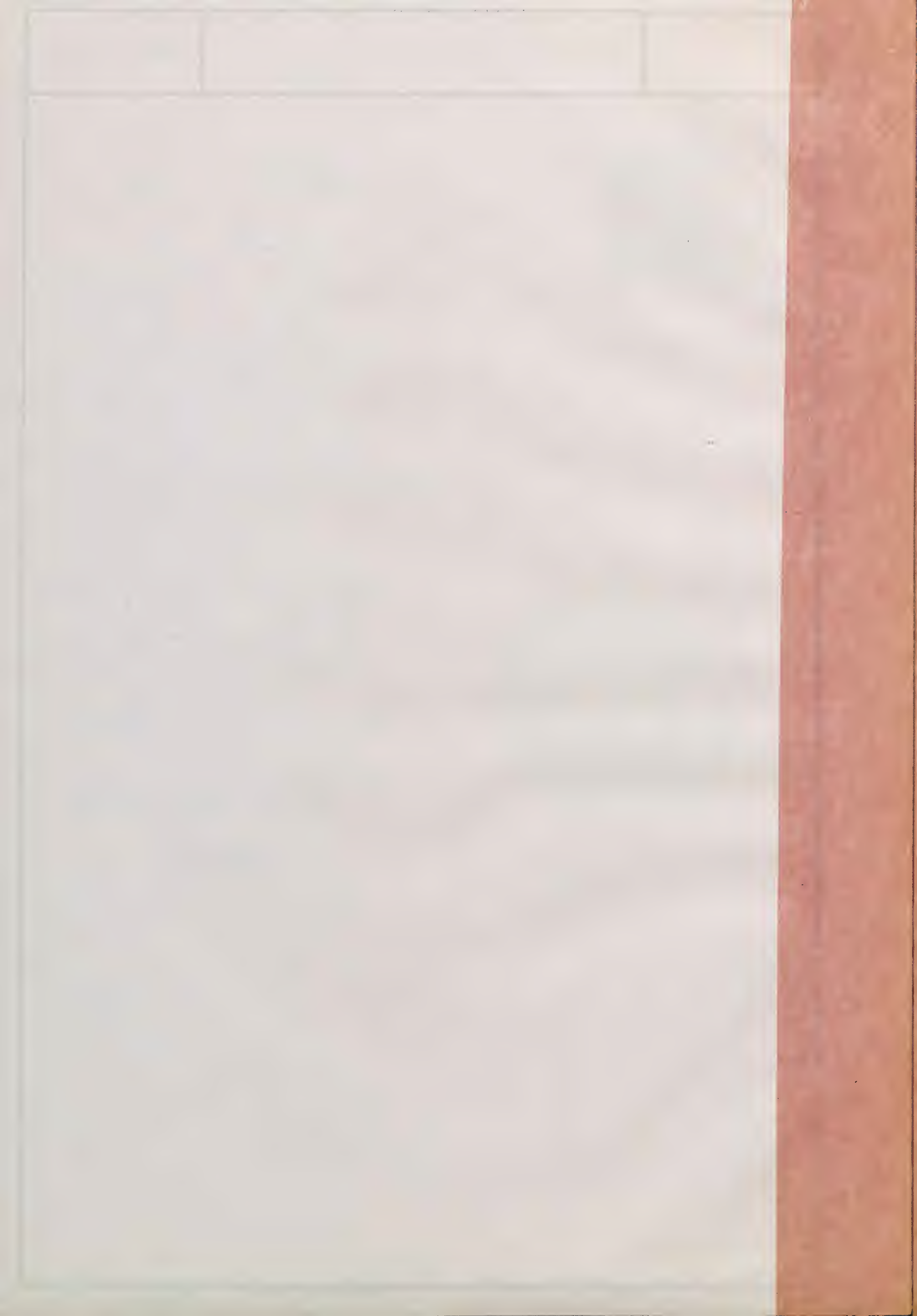
La forma y dimensiones se detallan en la figura 10, y se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 2

PIEZA Nº 10 8 (u)

Figura 10

UNE A4 210 x 297

Alvarez Octubre 1980



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS "ARQUIMEDIANO X", FORMADO POR OCHO CARAS EXAGONALES REGULARES (C_6) Y SEIS CARAS CUADRADAS (C_4), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1 C_4 + 2 C_6$.

Radio de la esfera circunscrita

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo n.º 42.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO X", formado por seis caras cuadradas (C_4), y ocho caras exagonales regulares (C_6). concurriendo en cada vértice $1\ C_4 + 2\ C_6$.

Este modelo puede considerarse como una variante del M - 42.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M 42.1

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{X} = radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{X} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este poliedro, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES CUADRADAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A4 210 x 297

Tabarés Octubre 1980

Modelo M-42.2

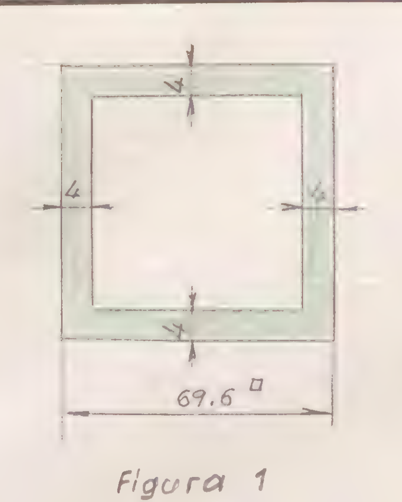


Figura 1

PIEZA Nº 1 6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES, REGULARES

8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

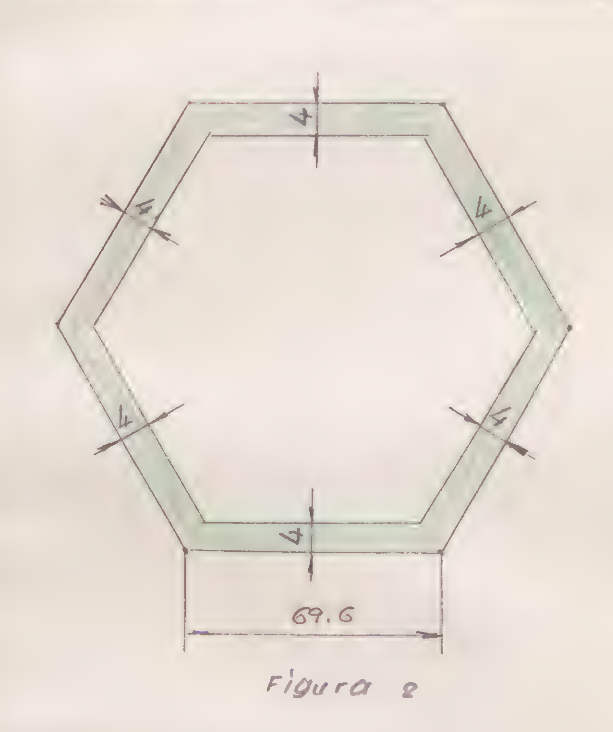


Figura 2

PIEZA Nº 2

8 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS EXAGONALES

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

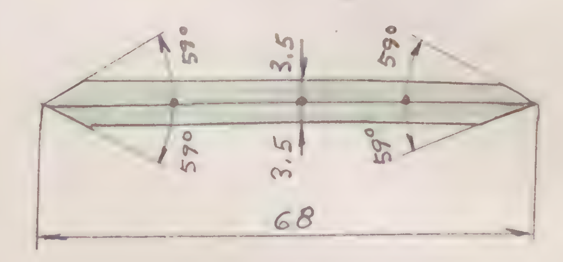


Figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Calvarez Octubre 1980



Modelo M- 42.2

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA EXAGONAL Y OTRA CUADRADA 24 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 4

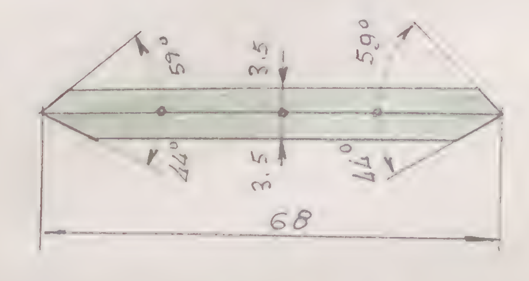


Figura 4

PIEZA Nº 4 24 (u)

Figura 4

UNE A4 210 x 297



EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO M-42-1,

DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIEN-

DO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU

ESFERA CIRCUNSCRITA

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO X", formado por seis caras cuadradas (C_4) y ocho caras exagonales regulares (C_8), concurriendo en cada vértice $1\ C_4 + 2\ C_8$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M- 42.1, de igual forma que éste, siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{X} = 76.1$ mm)

Para obtener el despiece de éste modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M-42.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{X} = 76,1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297



A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido consignadas en las diferentes figuras del modelo M - 42.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M - 42.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES CUADRADAS

6 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1 6 (u)	69.6	48.1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES REGULARES

8 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2 8 (u)	69.6	48.1

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-483

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS 6 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3 6 (u)	69.6	48.1
	5.5	5

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES

8 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	69.6	48.1
8 (u)	5.5	5

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS EXAGONALES REGULARES 12 unidades

UNE A4 210 x 297

Catalans Octubre 1980



La figura 5 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas
PIEZA Nº5	68	47
12 (u)	4	4
	59°	59°

PIEZA Nº 6 UNIONES DE ARISTAS DE UNA CARA EXAGONAL Y OTRA CUADRADA 24 unidades

La figura 6 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

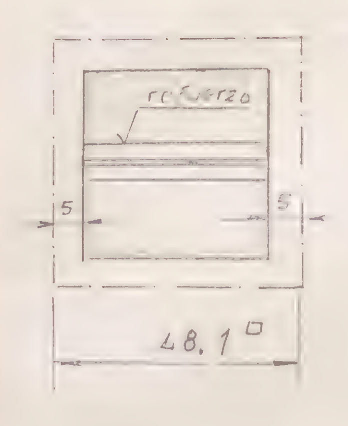
FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº6	68	47
24 (u)	4	4
	44°	44°
	59°	59°

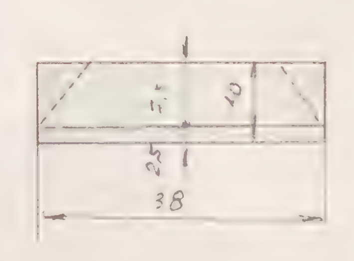
PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS 12 unidades

Por ser de muy pequeño tamaño estas caras, su refuerzo transversal se reduce de tamaño y se coloca en la cara según se indica en la siguiente figura 1, que sustituye a la fig. 7 del modelo M-42.1.



		Modelo M-42.3





PIEZA Nº 7

12 (u)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 24 unidades

La figura 8 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 8	126	84
24 (u)	63	42
	3	2.5
	9	7.5
	12	10
	44°	44°
	59°	59°

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

6 unidades

La figura 9 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

UNE A4:210 x 297



FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas
PIEZA Nº 9	69.6	48.1
.6(u)	2	2

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 8 unidades

La figura 10 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 10	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 10	69.6	48.1
8 (u)	2	2

UNE A4:210 x 297

Tavarez Octubre 1980



EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO M - 42.2 DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 42.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO X", formado por seis caras cuadradas (C_4), y ocho caras exagonales regulares (C_6), concurriendo en cada vértice $1C_4 + 2C_6$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M- 42.2, de igual forma que éste, pero siendo más pequeño el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{X} = 76.1$ mm)

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, desarrollado en el modelo M - 42.2, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción k = 76.1 : 110 o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{X} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

E. Álvarez   Octubre 1980



Modelo M-42.4

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-42.2, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-42.4, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES CUADRADAS 6 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1	69.6	48.1
6 (u)	4	3,0

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES REGULARES 8 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 2	69.6	48.1
8 (u)	4	3.0

Tavares Octubre 1980



PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS DE DOS CARAS EXAGONALES

12 unidades

La figura 3 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 12 (u)	68 3,5 59°	47 2,5 59°

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA EXAGONAL Y OTRA CUADRADA

24 unidades

La figura 4 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4 24 (u)	68 3.5 44° 59°	47 2,5 44° 59°

Calvarro Octubre 1980

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO X" OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_6", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA $\frac{3}{4}\,a_6$. - EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL EXAEDRO REGULAR GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador $r_{e_c}^{6} = 110$ mm

UNE A4·210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO X", obtenido por truncadura de vértices de un exaedro regular convexo, de arista "a_6", a la distancia $x = \frac{3}{4} a_6$. El Arquimediano generado se construirá con las caras macizas, y el exaedro regular generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^6 = radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$$r_{ec}^6 = 110 \text{ mm}$$

1) CONSIDERACIONES PREVIAS

El proceso geométrico denominado de TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, por el cual se obtienen varios de los POLIEDROS SEMIREGULARES CONVEXOS, denominados también POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, obteniéndose también por dicho proceso los propios poliedros regulares convexos, fué estudiado sistemáticamente y aplicado al TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, en los ejercicios M-39.1; M-39.5; M-39.7 y M-6.2

UNE A4 210 x 297



En dicho estudio se aprecia que las distintas posiciones del plano secante dan lugar a la obtención de un poliedro núcleo, de muy variadas formas, dependientes de la posición del plano secante con respecto al tetraedro generador. La posición de dicho plano secante se fija por la condición de pasar por puntos situados a la distancia variable "x", sobre las aristas que concurren en cada vértice del mencionado tetraedro generador.

Entre las diversas posiciones del plano secante, existen algunas notables en que el poliedro núcleo resultante es un POLIEDRO ARQUIMEDIANO, o también un POLIEDRO REGULAR CONVEXO.

Dichas posiciones notables estudiadas en el TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, se detallan resumidamente en el ejercicio M-40.5. El proceso de obtención aplicado en el tetraedro regular convexo, puede hacerse extensivo a los restantes poliedros regulares convexos (exaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), obteniéndose también en ellos un poliedro núcleo que puede ser un POLIEDRO ARQUIMEDIANO, o también un POLIEDRO REGULAR CONVEXO.

El modelo que estudiamos en este ejercicio, puede obtenerse (partiendo) del modelo M-35.5 en el cual el poliedro núcleo obtenido por la TRUNCADURA DE VÉRTICES



de un EXAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia $x = \frac{1}{2} a_6$, era el ARQUIMEDIADO III de arista $a_{III} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$

Ahora bien, si suponemos que el plano secante, varía su posición, o distancia $x = \frac{1}{2} a_6$, alejándose del vértice correspondiente, dicho plano secante da lugar a un poliedro núcleo irregular de las siguientes características geométricas:

a) El plano secante produce en las caras del exaedro generador, cuadrados, cuyos lados van disminuyendo de longitud a medida que crece la distancia "x".

En efecto, sea (figura 1), ABCD una cara del exaedro generador de arista a_6; tomando, a partir de los vértices, distancias $x > \frac{1}{2} a_6$, obtendremos los puntos E, F, G, H, I, J, K, L, que nos sitúan las rectas (o trazas) de intersección de los cuatro planos secantes con la considerada cara ABCD. Las intersecciones de dichas trazas dan lugar a la formación del cuadrado MNPQ, cara del poliedro nú- (1)

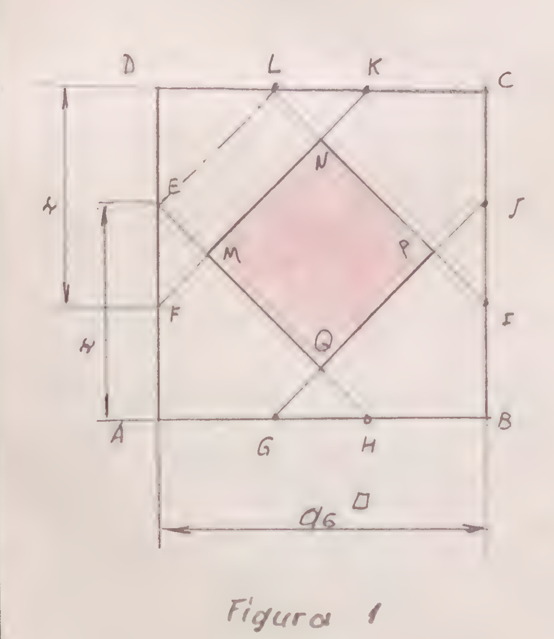


Figura 1



dro, de lado $\overline{MN} = l_4$

De la figura 1, deducimos las siguientes relaciones métricas

$$\overline{AF} = \boxed{\overline{ED}} = \overline{AD} - \overline{FD} = \boxed{a_6 - x}$$

y siendo $\overline{MN} = l_4$ = lado del cuadrado MNPQ, tendremos también:

$$\overline{EL} = \overline{MN} = \boxed{l_4} = \overline{ED} \times \sqrt{2} = \boxed{(a_6 - x)\ \sqrt{2}}$$ o sea:

$$\boxed{l_4 = (a_6 - x)\sqrt{2}} \qquad (1)$$

fórmula que nos determina la longitud del lado del cuadrado MNPQ, en función de la distancia "x" (variable) de la truncadura de vértices, del exaedro generador.

b) Por otra parte, el plano secante de dicha truncadura produce en los ángulos sólidos de los vértices del poliedro generador, triángulos regulares de lado $\overline{FK}$ (fig. 1) sobre los que se forman exágonos equiángulos MNRSTU (figura 2) cuyos lados alternativos $\overline{MN}$; $\overline{RS}$; $\overline{TU}$; son coincidentes con los lados de dichos triángulos regulares.

Los cuatro cuadrados MNPQ (fig. 1) y los ocho exágo-



Modelo M-40.5

...no equiángulo MNRSTU (figura 2) con las caras que limitan al poliedro núcleo que se obtiene de la truncadura de vértices del exaedro regular convexo, generados a la distancia $x > \frac{1}{2} a_6$.

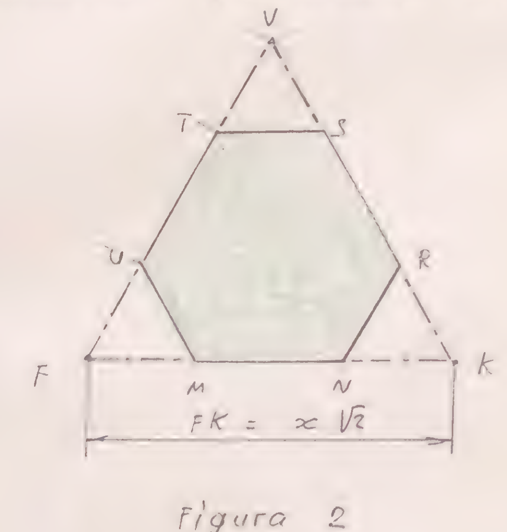


Figura 2

El escágono MNRSTU, no es, en general, un escágono regular, salvo en una posición tal del plano recante en la cual ello se produzca.

Para ello será necesario que se verifique la condición de ser

$$\boxed{\overline{MN} = \frac{1}{3}\ \overline{FK}} \qquad (2)$$

la que se puede alcanzar, ya que $\overline{MN}$ varía desde la longitud $\overline{MN} = \overline{FK}$ hasta $\overline{MN} = 0$, por ir creciendo los lados $\overline{MN}$ al aumentar "x."

De la figura 1, se deduce que:

$$\boxed{\overline{FK}} = \overline{DF} \times \sqrt{2} = \boxed{x\sqrt{2}} \qquad (3)$$

por lo que el escágono MNRSTU, (fig. 2), será regular cuando se cumpla la condición (2) es decir, cuando se verifique que

$$\frac{\overline{FK}}{3} = \boxed{\frac{x\sqrt{2}}{3} = l_4} \qquad (4)$$

UNE A4 210 x 297

Calvarie   Julio 1980



Modelo IX-4015

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones de primer grado (1) y (4), tendremos las siguientes relaciones métricas:

$$\left.\begin{aligned} l_4 &= (a_6 - x)\sqrt{2} \qquad (1) \\ l_4 &= \frac{\sqrt{2}}{3}\,x \qquad (4) \end{aligned}\right\}$$

de donde:

$$(a_6 - x)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,x \quad ;; \quad a_6 - x = \frac{x}{3} \quad ;;$$

$$a_6 = \frac{x}{3} + x = \left(\frac{1}{3} + 1\right)x = \frac{4}{3}\,x \qquad \boxed{x} = a_6 : \frac{4}{3} =$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}\,a_6} \qquad \text{o sea que}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{4}\,a_6} \qquad (5)$$

La ecuación (5) nos demuestra que la truncadura de vértices de un exaedro regular convexo, a la distancia $x = \frac{3}{4}\,a_6$, da lugar a la formación de un poliedro semiregular convexo compuesto de seis caras cuadradas (ver características a) y de ocho caras exagonales regulares (ver características b) o sea que dicho poliedro nucleo es un "ARQUIMEDIANO X," estudiado en el ejercicio



G.E. nº....- Lámina 42, de las características siguientes:

Número de caras cuadradas	$C_4 = 6$
Número de caras exagonales	$C_6 = 8$
Número de vértices $= \frac{6 \times 4 + 8 \times 6}{3} =$	$V = 24$
Número de aristas $= \frac{6 \times 4 + 8 \times 6}{2} =$	$A = 36$
Número de caras de un ángulo sólido	$1 C_4 + 2 C_6$

La longitud de la arista $a_x = l_4$ se obtiene, sustituyendo en (4) el valor de (5)

$$l_4 = \frac{\sqrt{2}}{3} x = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{4} \times a_6 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4} a_6 = a_x} \qquad (6)$$

fórmula que nos da la magnitud de la arista "a_x" del Arquimediano X generado, en función de la arista "a_6" del exaedro generador.

Así pues, y como resumen de lo expuesto anteriormente, podemos establecer el siguiente enunciado que justifica el del modelo estudiado:



Modelo M-19.5

"El poliedro núcleo obtenido por la TRUNCADURA DE VÉRTICES de un EXAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia $x = \frac{3}{4} a_6$, es un ARQUIMEDIANO X, de arista igual a $a_X = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$"

2) CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

2.1) Arista "a_6" del exaedro regular convexo generador

Se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$" deducida en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 2. Despejando en ella "a_6", tendremos:

$$a_6 = r_{ec}^6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times r_{ec}^6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6 \qquad (7)$$

2.2) Arista "a_X" del Arquimediano generado.

Se deduce de la fórmula (6), sustituyendo en ella el valor de "a_6" obtenido en (7).- Tendremos pues:

$$a_X = \frac{\sqrt{2}}{4} a_6 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{6}}{6} r_{ec}^6 \qquad (X)$$

UNE A4 210 x 297



Modelo M-32.5

2.3) Distancia "x" en que la truncadura de vértices del exaedro regular convexo produce el ARQUIMEDIANO X

Se obtiene de la fórmula (5) sustituyendo en ella "a_6" por su valor obtenido en (7). Será pues:

$$x = \frac{3}{4} a_6 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_{ec}^{6} \qquad (9)$$

2.4) Radio "r_{c-6}" de la circunferencia circunscrita al exágono regular de una cara C_6 del Arquimediano generado, de arista "$a_X = \frac{\sqrt{6}}{6} r_{ec}^{6}$ (ver fórmula (8)

$$r_{c-6} = a_x = \frac{\sqrt{6}}{6} r_{ec}^{6} \qquad (10)$$

2.5) Radio "r_{ei}^{X-6}" de la esfera tangente a las caras exagonales del Arquimediano generado

Dicho radio se obtuvo en el ejercicio G.E. nº... - Lámina 42, en función de su arista. Su valor es "$r_{e-i}^{X\cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{2} a_X$". Sustituyendo en ella a_x por su valor obtenido en (8), será:

$$r_{ei}^{X-6} = \frac{\sqrt{6}}{2} a_X = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} r_{ec}^{6} = \frac{1}{2} r_{ec}^{6} \qquad (11)$$

UNE A4 210 x 297

[signature] Julio 1980



		Modelo M-42.5

2.6) Altura "h_6" de las pirámides auxiliares, rectas, exagonales regulares

Se obtiene como diferencia del radio r_{ec}^6 de la esfera circunscrita al escaedro generador (dato del ejercicio), y del radio r_{ei}^{C-6} (fórmula 11).- Así pues, será:

$$\boxed{h_6} = r_{ec}^6 - r_{ei}^{X-6} = r_{ec}^6 - \frac{1}{2} r_{ec}^6 = \boxed{\frac{1}{2} r_{ec}^6} \qquad (12)$$

2.7) Arista "a_6" de las pirámides auxiliares, rectas, exagonales, regulares

Su valor es el de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, siendo sus catetos: Uno, la altura $h_6 = \frac{1}{2} r_{ec}^6$ (ver fórmula 12), y el otro, el radio "$r_{C-6} = \frac{\sqrt{6}}{6} r_{ec}$" (ver fórmula (10).- Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_6} = \sqrt{(h_6)^2 + (r_{C-6})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} r_{ec}^6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6} r_{ec}^6\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}\ r_{ec}^6 =$$

$$= \sqrt{\frac{6+4}{24}}\ r_{ec}^6 = \sqrt{\frac{10}{24}}\ r_{ec}^6 = \boxed{\sqrt{\frac{5}{12}}\ r_{ec}^6} \qquad (13)$$

Las magnitudes necesarias para la construcción de este modelo, se deducen de las fórmulas (7), (8) y (13). Para $r_{ec}^6 = 110$ mm, sus valores son:



Modelo M-42.5

1) Arista "a_6" del exaedro generador (fórmula 7)

$$\boxed{a_6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}{}^{6} \cong 1,15\ 47\ 00\ 53\ 9\ldots \times 110 = \boxed{127\ mm}$$

---

2) Arista "a_X" del Arquimediano generado (fórm. 8)

$$\boxed{a_X} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ r_{ec}{}^{6} \cong 0,40\ 82\ 48\ 29\ 1\ldots \times 110 = \boxed{44,9\ mm}$$

---

3) Arista "a_6" de las pirámides auxiliares, rectas, exagonales, regulares (fórmula 13)

$$\boxed{a_6} = \sqrt{\frac{5}{12}}\ r_{ec}{}^{6} \cong 0,64\ 54\ 97\ 22\ 4\ldots \times 110 \cong \boxed{71\ mm}$$

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

4) EXAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M-2.102

[illegible] Julio 1980



PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M-2.102

B) ARQUIMEDIANO X GENERADO, DE CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

6 unidades

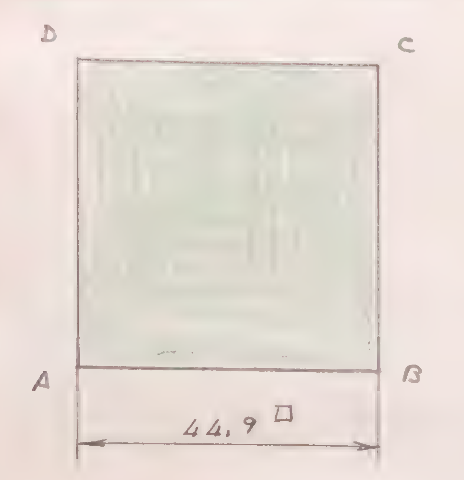


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 3 6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

8 unidades

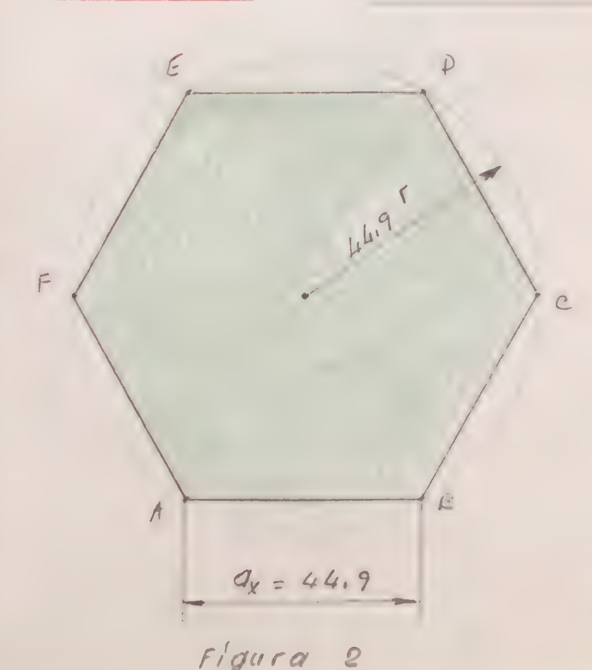


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 4 8(u)

Figura 2



PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 3

D C 5.5 5.5 5.5 5.5 A B 44.9

Figura 3

PIEZA Nº 5 6 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 4.

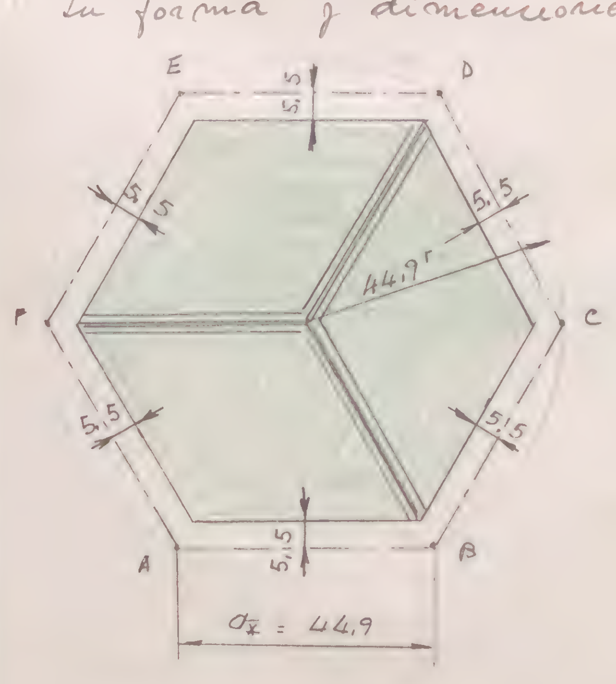


Figura 4

PIEZA Nº 6

8 (u)

Figura 4

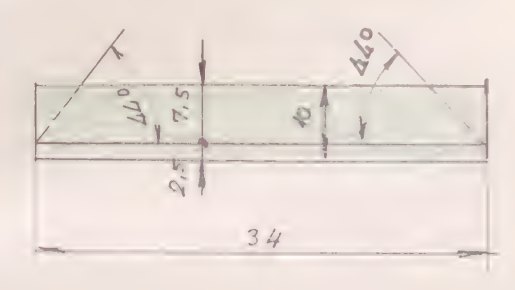


Modelo M-42.5

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 5; su colocación en la figura 3.



PIEZA Nº 7 12(u)

Figura 5

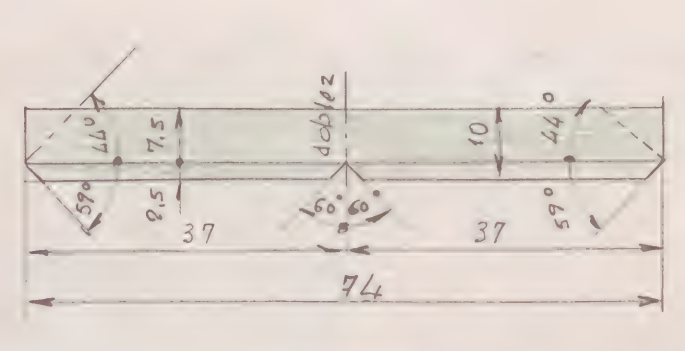
Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación en la figura 4.

PIEZA Nº 8



24 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS EXAGONALES

12 unidades

Tavárez Julio 1980



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7.

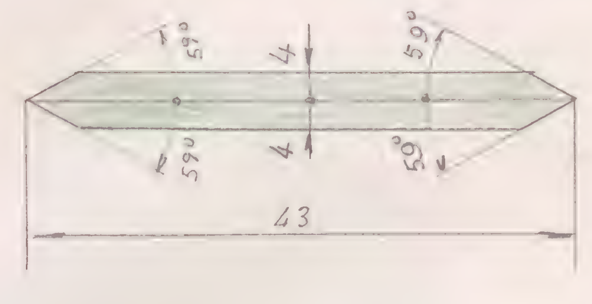


Figura 7

PIEZA Nº 9   12 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10   UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA EXAGONAL   24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

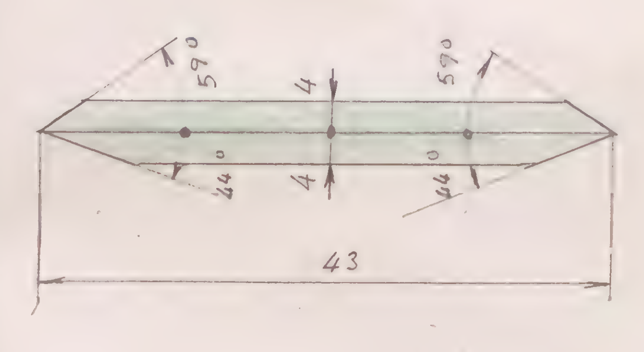


Figura 8

PIEZA Nº 10

24 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 11   FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS   6 unidades

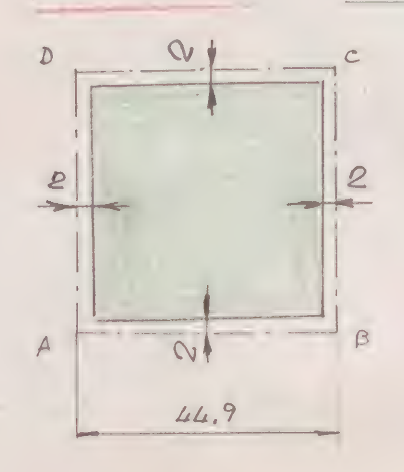


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 11   6 (u)

Figura 9



PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 8 unidades

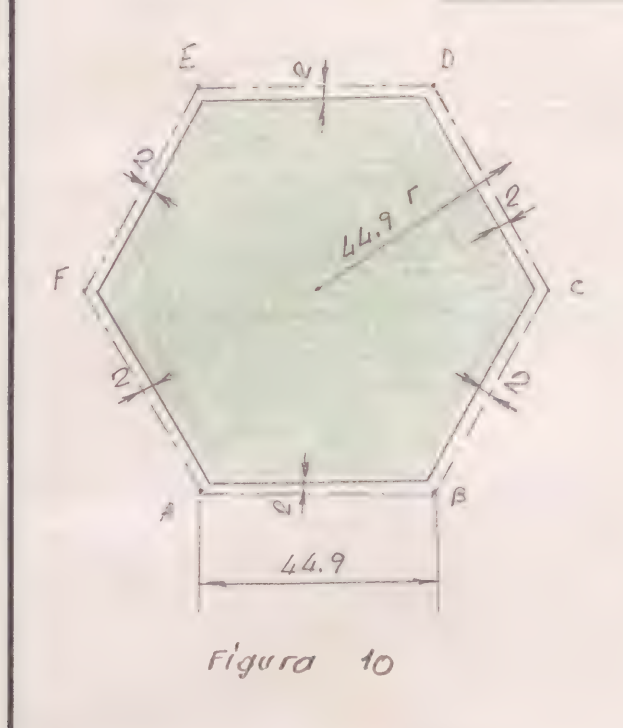


Figura 10

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular convexo ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 1.

PIEZA Nº 12 8 (u)

Figura 10

c) PIRÁMIDES AUXILIARES, REGULARES, EXAGONALES, Y DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 13 DESARROLLO LATERAL 8 unidades

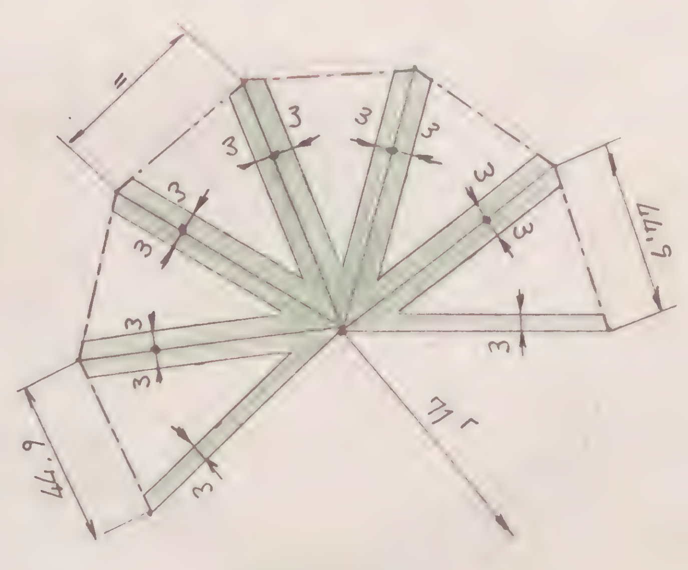


Figura 11

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 13

8 (u)

figura 11



Modelo M-49.5

PIEZA Nº 14 UNIONES ARISTAS 48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

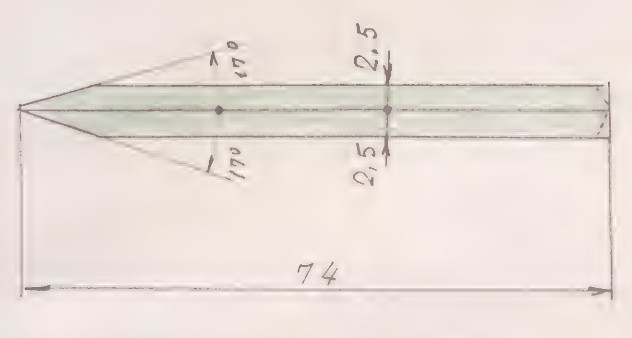


Figura 12

PIEZA Nº 14

48 (a)

Figura 13

Julio 1980



MODELO M - 42. 5 PATRONES



EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-42.5, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, SEIS PIRÁMIDES RECTAS, CUADRADAS, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS CUADRADAS DEL "ARQUIMEDIANO X" GENERADO, Y POR VÉRTICES LAS PROYECCIONES SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL EXAEDRO GENERADOR, DE LOS CENTROS DE LAS CARAS CUADRADAS, DESDE EL CENTRO "O" DEL POLIEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{ec}^{E} = 110$ mm.

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-42.6

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-42.5, seis pirámides rectas, cuadradas, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras cuadradas del "Arquimediano X" generado, y por vértices las proyecciones sobre la esfera circunscrita al exaedro generador, de los centros de las caras cuadradas, desde el centro "O" del exaedro generador.

Como se deduce de este enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-42.5, al cual ha de añadírsele seis pirámides, rectas, de base cuadrada, y de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación:

La altura "h_4" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{6}" de la esfera circunscrita al exaedro regular convexo generador, y del radio "r_{ei}^{X-4}" de la esfera tangente a las caras cuadradas del Arquimediano generado. Así pues, tendremos:

$$h_4 = r_{ec}^{6} - r_{ei}^{X-4} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^{6}, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº.... Lám. 2,

UNE A4 210 x 297

Tavares Septbre. 1980



en función de la arista "a_6" del exaedro generador. Su valor es:

$$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6 \qquad (2)$$

El radio "r_{ei}^{X-4}" de la esfera tangente a las caras cuadradas del Arquimediano X, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº.... Lámina 42. Su valor, en función de la arista "a_x" de dicho Arquimediano, es:

$$r_{ei}^{X-4} = \sqrt{2} \; a_x \qquad (3)$$

y sustituyendo a_x por su valor $\frac{\sqrt{2}}{4} a_6 = a_x$ (ver fórmula (6) del ejercicio M-42.5), tendremos:

$$r_{ei}^{X-4} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} a_6 = \frac{1}{2} a_6 \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_4 = r_{ec}^{6} - r_{ei}^{X-4} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6 - \frac{1}{2} a_6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) a_6 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a_6 \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor de $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{6}$, en función del radio r_{ec}^{6} de la esfera circunscrita al exaedro generador, (ver fórmula (7) del modelo M-42,5), tendremos:

$$h_4 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times a_6 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{6} \qquad (6)$$



Para obtener la longitud de la arista "a_4" de las pirámides cuadradas, tendremos en cuenta que "a_4" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es "h_4", y el otro el radio "r_{c-4}" de la circunferencia circunscrita a la cara cuadrada del Aequimediano X. Así pues, será:

$$a_4 = \sqrt{(h_4)^2 + (r_{c-4})^2} \qquad (7)$$

El radio "r_{c-4}" de la circunferencia circunscrita a un cuadrado de lado l_4, es: (ver fórmula (1) del ejercicio G.P. 1.400-43)

$$r_{c-4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; l_4 \qquad (8)$$

En la fórmula (8), aplicada a este estudio, tendremos $L_4 = a_X$, siendo a su vez $a_X = \frac{\sqrt{2}}{4} a_6$ (ver fórmula (6) del modelo M-42.5), y también será $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{6}$ (ver fórmula (7) del modelo M-42.5), por lo que sustituyendo valores, tendremos:

$$\boxed{l_4} = a_X = \frac{\sqrt{2}}{4} a_6 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{6} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6} \; r_{ec}^{6}} \qquad (9)$$

valor que sustituido en (8), nos dará:

$$\boxed{r_{c-4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{6} \times r_{ec}^{6} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6} \; r_{ec}^{6}} \qquad (10)$$

UNE A4 210 x 297

Calvarez Septiembre 1980



Sustituyendo en [?] los valores (6) y (10), tendremos:

$$a_4 = \sqrt{(h_4)^2 + (r_{c-4})^2} = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} r_{ec}^6\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}\; r_{ec}^6 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2}{9} + \frac{3}{36}}\; r_{ec}^6 =$$

$$= \sqrt{\frac{4 \times (3-\sqrt{3})^2 + 3}{36}}\; r_{ec}^6 = \sqrt{\frac{4 \times (9+3-6\sqrt{3}) + 3}{36}}\; r_{ec}^6 =$$

$$= \sqrt{\frac{4 \times (12-6\sqrt{3}) + 3}{36}} \times r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{48-24\sqrt{3}+3}}{6}\; r_{ec}^2 = \frac{\sqrt{51-24\sqrt{3}}}{6}\; r_{ec}^6 =$$

$$= \frac{\sqrt{3 \times (17-8\sqrt{3})}}{6}\; r_{ec}^6$$ de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_4 = \frac{\sqrt{3 \times (17-8\sqrt{3})}}{6}\; r_{ec}^6} \qquad (11)$$

Las fórmulas (9) y (11) nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides cuadradas que se adicionan al modelo M-42.5, para obtener el que se estudia.

Para este caso particular en el que es $r_{ec}^6 = 110$ mm, será:

$$l_4 = \boxed{a_I} = \frac{\sqrt{6}}{6}\; r_{ec}^6 \cong 0{,}40\,82\,48\,291 \ldots \times 110 \cong \boxed{44{,}9 \text{ mm}}$$ y

$$\boxed{a_4} = \frac{\sqrt{3 \times (17-8\sqrt{3})}}{6}\; r_{ec}^6 \cong 0{,}51\,18\,26\,268 \ldots \times 110 \cong \boxed{56{,}3 \text{ mm}}$$

UNE A4 210 x 297

Calvete Septiembre 1980



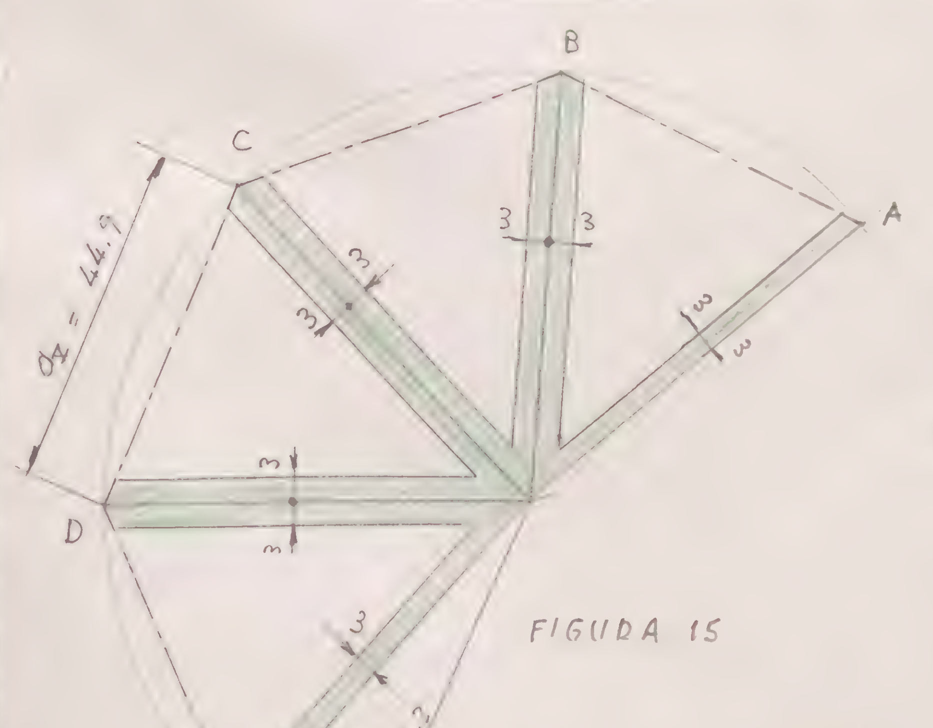
Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO X, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA $\frac{3}{4} a_6$

Piezas 1 al 14, iguales a las del modelo M-42.5

B) PIRÁMIDES RECTAS, CUADRADAS, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO M-42.5

PIEZA Nº 15 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS. 6 unidades



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 15

AB = BC = CD = DE = = 44.9 mm

PIEZA Nº 15

6 (u)

Figura 15



		Modelo M-42.6

PIEZA Nº 16. UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 16

Figura 16

PIEZA Nº 16

24 (u)

Figura 16

ESTUDIO COMPLEMENTARIO

Si unimos cada vértice de las pirámides adicionales de la figura 15, con los cuatro que les rodean en el espacio, se nos formará un octaedro regular convexo, conjugado del exaedro generador, cuyas aristas se cruzan perpendicularmente con las de dicho exaedro. Este octaedro regular convexo, estará inscrito en la misma esfera circunscrita al exaedro generador.

La longitud de su arista a_8 se deduce de la fórmula "$r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$" deducida en el ejercicio G.E. nº.... Lámina 3, despejando en ella a_8. Su valor será pues:

$\boxed{a_8} = r_{ec}^8 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\, r_{ec}^8 = \sqrt{2} \times 110 = \boxed{155,6 \text{ mm}}$

Esta propiedad se ha destacado en el presente modelo

Calvarez Septiembre 1980

UNE A4-210 x 297



MODELO M - 42.6

PATRONES



MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO X", OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_8", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA "$\frac{1}{3} a_8$".- EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador

$$r^8_{ec} = 110 \text{ mm}$$

UNE A4·210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-42.7

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO X" obtenido por truncadura de vértices de un octaedro regular convexo de arista "a_8", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, la distancia $x = \frac{1}{3} a_8$. El Arquimediano obtenido se construirá con las caras macizas, y el octedro regular convexo generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{8} = radio de la esfera circunscrita al octaedro regular generador

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

Teniendo presente lo expuesto en las CONSIDERACIONES PREVIAS del ejercicio "modelo M-40.5" en las que se destaca el proceso geométrico denominado TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, por el que se obtienen muchos de los POLIEDROS ARQUIMEDIANOS entre los que se encuentra el ARQUIMEDIANO X, de este ejercicio, podemos establecer de inmediato las siguientes propiedades del poliedro núcleo que se obtiene por la truncadura de vértices del octaedro regular a la distancia $x = \frac{1}{3} a_8$.

El valor de "x" se obtiene por las condiciones geométricas



siguientes, cuando el plano secante produzca:

a) En las caras del octaedro generador, polígonos regulares convexos de doble número de lados que los de las mencionadas caras, cuyos lados son alternativamente coincidentes con los de las mismas, y cuyo número será, por consiguiente, el de caras del mencionado octaedro generador.

b) En los ángulos sólidos de los vértices, polígonos regulares convexos de tantos lados como caras concurren en los vértices de dichos ángulos sólidos, y situados en el plano secante.

Estas dos condiciones aplicadas al caso propuesto, nos permiten conocer las características del poliedro núcleo resultante en esta truncadura de vértices, y al mismo tiempo comprobar la posición del plano secante que la produce.

En efecto: Por la condición a), el poliedro núcleo tendrá ocho caras exagonales, regulares convexas, (C_6) sobre las caras del poliedro generador, y

Por la condición b), tendrá también seis caras cuadradas, (C_6) sobre el plano secante.

Consecuentemente, el poliedro núcleo resultante de



esta truncadura de vértices, tendrá las siguientes características geométricas:

1) Número de caras exagonales regulares ____ = 8 C_6

2) Número de caras cuadradas ____ = 6 C_4

3) Número de vétices = $\frac{8 \times 6 + 6 \times 4}{3}$ = 24 V

4) Número de aristas = $\frac{8 \times 6 + 6 \times 4}{2}$ = 36 A

5) Número de caras en cada vértice = 1 C_4 + 2 C_6

En consecuencia, y a la vista de los resultados anteriores, se deduce que el poliedro núcleo convexo, resultante de esta truncadura de vértices en el octaedro regular convexo, es un ARQUIMEDIANO I, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº.....- Lámina 42.

Finalmente observemos que para obtener en un triángulo equilátero, un exágono regular convexo de lados alternativamente coincidentes con los del mencionado triángulo, han de truncarse los vértices de éste a las distancias $1/3\ l_3$ (la demostración es elemental).

Las conclusiones anteriores justifican el enunciado de este ejercicio

UNE A4 210 x 297

[signature] Octubre 1980



Modelo M-42.7

CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

Calculamos previamente las siguientes magnitudes:

1.) Arista "a_8" del octaedro generador

Se deduce de la fórmula "$r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$", deducida en el ejercicio G.E. nº.... Lámina 3. Despejando en ella "a_8", tendremos:

$$a_8 = r_{ec}^8 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} r_{ec}^8 = \frac{2\sqrt{2}}{2} r_{ec}^8 = \sqrt{2}\ r_{ec}^8 \qquad (1)$$

2.) Distancia "x" en que la truncadura de vértices del octaedro regular convexo, produce el ARQUIMEDIANO X

$$x = \frac{1}{3} a_8 = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times r_{ec}^8 \qquad (2)$$

3.) Arista "a_X" del ARQUIMEDIANO X

$$a_X = x = \frac{1}{3} a_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^8 \qquad (3)$$

Las fórmulas anteriores aplicadas al modelo estudiado en el que es $r_{ec}^8 = 110$ m m. nos da los siguientes valores numéricos:

1) $a_8 = \sqrt{2}\ r_{ec}^8 \cong 1.41\ 42\ 13\ 56\ 2... \times 110 \cong 155.6$ mm

UNE A4 210 x 297



2) $\boxed{x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times r_{ec}^{8} \cong 0,47\ 14\ 04\ 52\ 1\ldots \times 110 \cong \boxed{51,9 \text{ mm}}$

3) $\boxed{a_{\text{X}}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times r_{ec}^{8} \cong 0,47\ 14\ 04\ 52\ 1\ldots \times 110 \cong \boxed{51,9 \text{ mm}}$

Conocidos los valores numéricos anteriores, puede efectuarse la construcción del modelo propuesto, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

A) ARQUIMEDIANO X, GENERADO, DE CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades

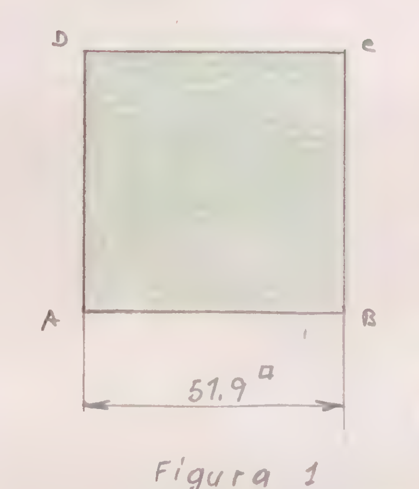


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

Modelo M-[illegible]

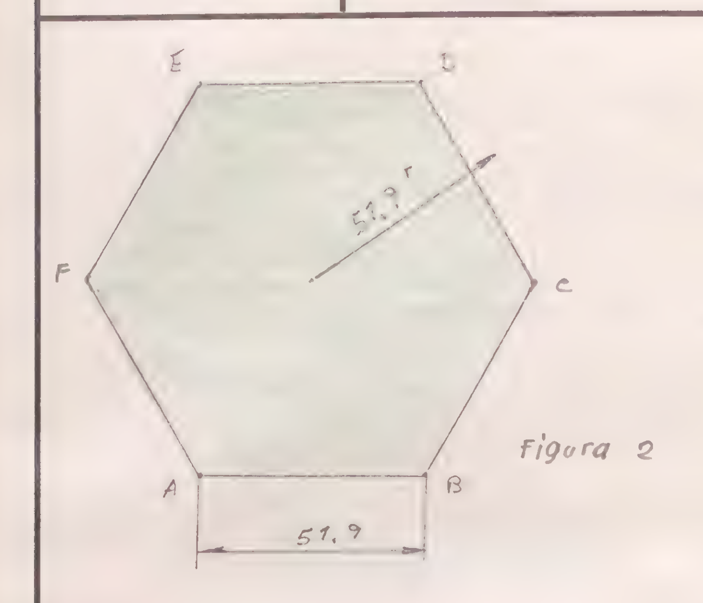


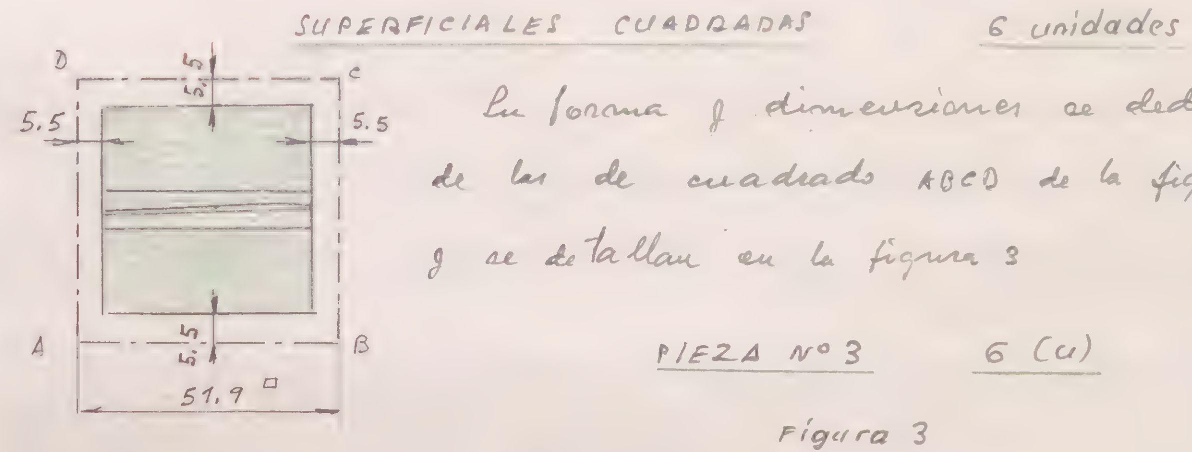
Figura 2

PIEZA Nº 2

8 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades



La forma y dimensiones se deducen de las de cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 6 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 8 unidades

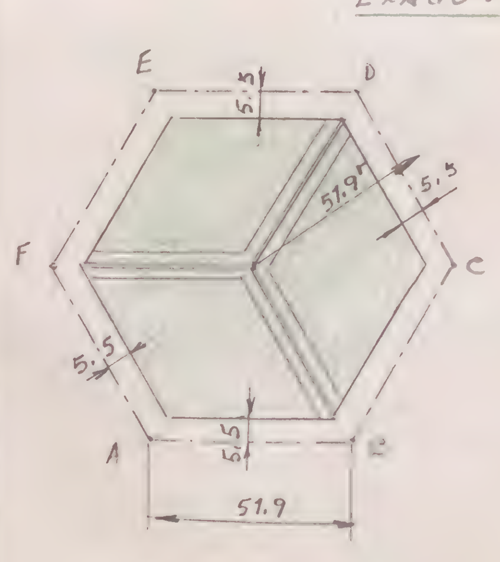


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 4

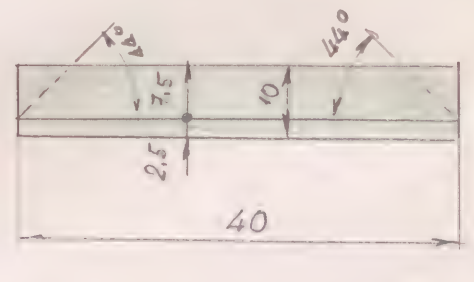
PIEZA Nº 4 8 (U)

Figura 4



PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación en la figura 3



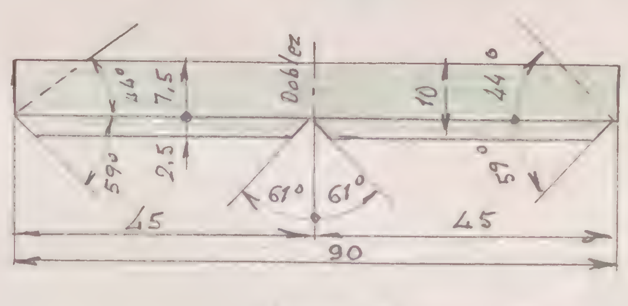
PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación en la figura 4



PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS EN DOS CARAS EXAGONALES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7



Modelo M- 42.7

PIEZA Nº 7 — 12 (u)

Figura 7

Figura 7

PIEZA Nº 8 — UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA, CON OTRA EXAGONAL — 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

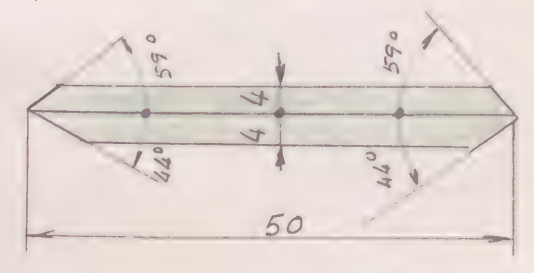


Figura 8

PIEZA Nº 8 — 24 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 — FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS — 6 unidades

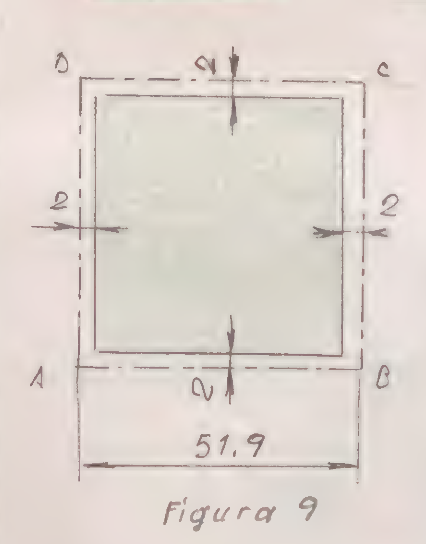


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 9

PIEZA Nº9 — 6 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 10 — FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES — 8 unidades

Alvarez — Octubre 1980



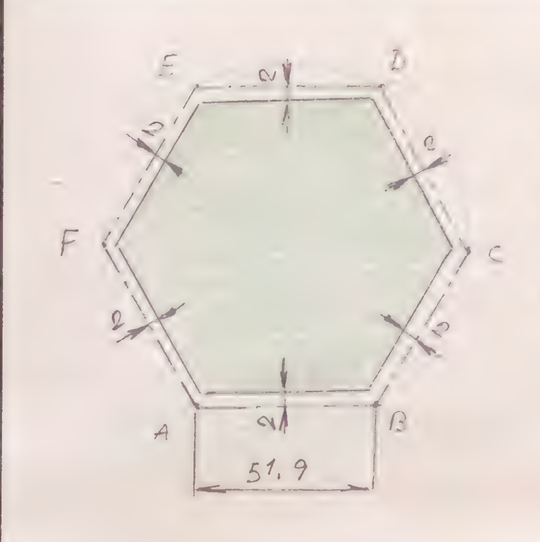


Figura 10

La forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABC, DEF de la figura 2, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 10 8 (u)

Figura 10

B) OCTAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

Queda reducido a seis pirámides triangulares, rectas, regulares, cuyo desarrollo lateral es el siguiente:

PIEZA Nº 11 DESARROLLO LATERAL DE LAS SEIS PIRÁMIDES TRIANGULARES 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

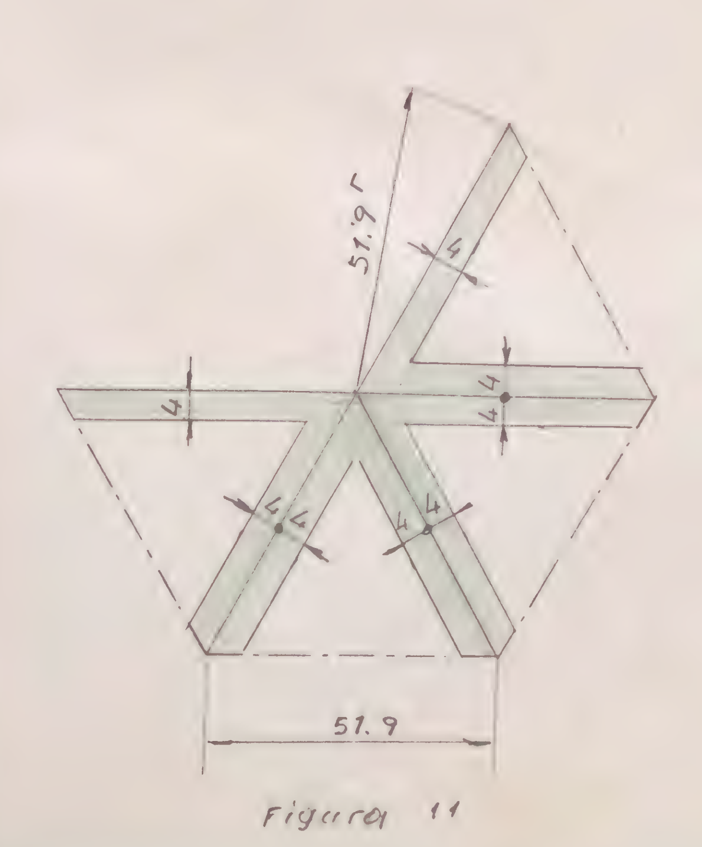


Figura 11

PIEZA Nº 11

6 (u)

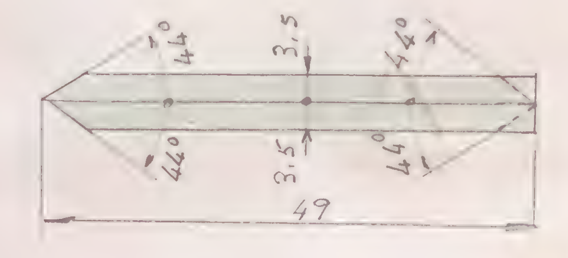
Figura 11



Modelo M-42.7

PIEZA Nº 12 UNIONES ARISTAS. 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12



PIEZA Nº 12 24 (4)

Figura 11

Figura 12

UNE A4 210 x 297

MODELO M- 42.7

PATRONES



[illegible]

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-42.7, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, SEIS PIRÁMIDES RECTAS, EXAGONALES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS EXAGONALES, REGULARES DEL ARQUIMEDIANO X GENERADO, Y POR VÉRTICES LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL OCTAEDRO GENERADOR, DE LOS CENTROS DE LAS CARAS EXAGONALES, DESDE EL CENTRO DEL POLIEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{e}^{6} = 110$ m m.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-42.7, seis pirámides rectas exagonales, regulares, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras exagonales del Arquimediano X generado, y por vértices las proyecciones, sobre la esfera circunscrita al octaedro generador, de los centros de las caras escagonales, desde el centro "O" del poliedro generador.

Como se deduce de este enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-42.7, al cual ha de añadirse seis pirámides escagonales, rectas y de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación.

La altura "h_6" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita al octaedro regular convexo generador, y del radio "r_{ei}^{X-6}" de la esfera tangente a las caras escagonales del Arquimediano generado. Así pues, tendremos:

$$h_6 = r_{ec}^{8} - r_{ei}^{X-6} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^{8}, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº... Lámina 3, en función de la arista "a_8" del octaedro regular. Su va-

UNE A4 210 x 297



lo es:

$$r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8 \qquad (2)$$

El radio " r_{ei}^{X-6} " de la esfera tangente a las caras exagonales del Arquimediano X, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº---- Lámina 42. Su valor, en función de la arista "a_x" de dicho Arquimediano, es:

$$r_{ei}^{X-6} = \frac{\sqrt{6}}{2} a_x \qquad (3)$$

y sustituyendo a_x por su valor "$a_x = \frac{1}{3} a_8$" (ver fórmula (3) del ejercicio M-42.7, tendremos:

$$r_{ei}^{X-6} = \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{1}{3} a_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_8 \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8 - \frac{\sqrt{6}}{6} a_8 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} a_8 \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor de $a_8 = \sqrt{2}\, r_{ec}^{8}$, en función del radio r_{ec}^{8} de la esfera circunscrita al octaedro generador (ver fórmula (1) del modelo M-42.7), tendremos:

$$h_6 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} a_8 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2} \times r_{ec}^{8} = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} r_{ec}^{8} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{8} \qquad (6)$$

Para obtener la longitud de la arista "a_6" de las pirámi-



des exagonales, rectas, regulares, tendremos en cuenta que "a_6" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es "h_6", y el otro el radio "r_{c-6}" de la circunferencia circunscrita a la cara exagonal del Arquimediano X. Así pues, será:

$$\boxed{a_6 = \sqrt{(h_6)^2 + (r_{c-6})^2}} \qquad (7)$$

El radio "r_{c-6}" de la circunferencia circunscrita al exágono de lado "l_6", es

$$\boxed{r_{c-6} = l_6} \qquad (8)$$

En la fórmula (8), aplicada a este estudio, es $l_6 = a_X$, siendo a su vez $a_X = \frac{1}{3} a_8$ (ver fórmula (3) del modelo M-42.7), y siendo $a_8 = \sqrt{2}\ r_{ec}^8$ (ver fórmula (1) del modelo M-42.6), valores que sustituidos en (8), nos da:

$$\boxed{l_6} = \boxed{a_X} = \frac{1}{3} a_8 = \frac{1}{3} \sqrt{2}\ r_{ec}^8 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^8} \qquad (9)$$

valor que sustituido en (8), nos dará:

$$\boxed{r_{c-6}} = l_6 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^8} \qquad (10)$$

Sustituyendo en (7) los valores (6) y (10), tendremos:

$$a_6 = \sqrt{(h_6)^2 + (r_{c-6})^2} = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^8\right)^2} =$$

UNE A4 210 x 297



$$= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2}{9} + \frac{2}{9}}\; r_{ec}^{8} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2 + 2}{9}}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}+2}{9}}\; r_{ec}^{2} = \sqrt{\frac{14-6\sqrt{3}}{9}}\; r_{ec}^{2} .$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_6 = \sqrt{\frac{14-6\sqrt{3}}{9}}\; r_{ec}^{8}} \qquad (11)$$

Las fórmulas (9) y (11) nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides exagonales, regulares, rectas, que se adicionan al modelo M-42.7, para obtener el que se estudia.

Para este caso particular de $r_{ec}^{8} = 110$ mm, será:

$$\boxed{a_x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times r_{ec}^{8} \cong 0,47\ 14\ 04\ 52\ 1 \ldots \times 110 \cong \boxed{51,9 \text{ mm}}$$

$$\boxed{a_6} = \sqrt{\frac{14-6\sqrt{3}}{9}}\; r_{ec}^{8} \cong 0,63\ 31\ 31\ 12\ 1 \ldots \times 110 \cong \boxed{69.6 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO X, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO A LA DISTANCIA $x = \frac{1}{3} a_8$



Piezas 1 al 11, iguales a las del modelo M-42.7

B) PIRÁMIDES RECTAS, EXAGONALES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO M-42.7

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG}$
$= 51.9 = d_x$

PIEZA Nº 12 8 (u)

Figura 12

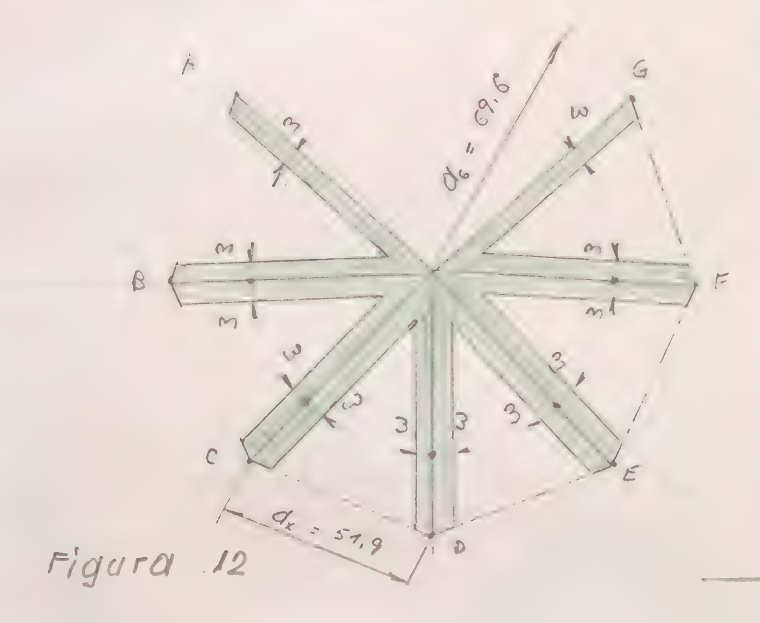


Figura 12

PIEZA Nº 13º UNIONES ARISTAS 48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 13

PIEZA Nº 13 48 (u)

Figura 13

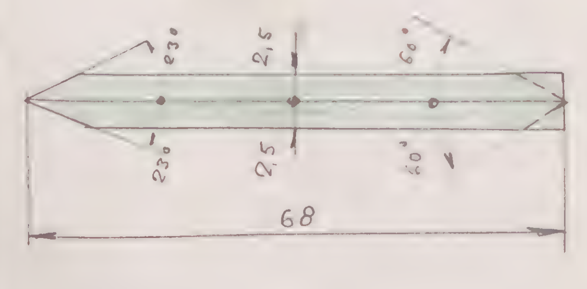


Figura 13

MODELO M - 42.8 PATRONES



INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS SEMI-REGULARES CONVEXOS, O "POLIEDROS ARQUIMEDIANOS"

ESTUDIO PREVIO A LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MISMOS.-

RESUMEN DE LOS ARQUIMEDIANOS DERIVADOS DE LOS CINCO POLIEDROS REGULARES CONVEXOS Y OBTENIDOS DE LOS MISMOS POR LOS PROCESOS A) TRUNCADURA DE VÉRTICES, Y B) TRUNCADURA DE VÉRTICES, SEGUIDO DE UNA TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS.

Los Arquimedianos obtenidos están representados en las Láminas 38 al 45 (ambas inclusive).

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 42.9

ENUNCIADO: Estudio previo a la construcción de los poliedros Arquimedianos.- Resumen de los derivados de los cinco poliedros regulares convexos y obtenidos de los mismos por los procesos A) "Truncadura de vértices" y B) "Truncadura de vértices, seguido de una "Truncadura paralela de aristas.

1) GENERALIDADES

En el ESTUDIO PREVIO al modelo M - 39.1, hemos establecido las "definiciones" (párrafo 2.), "propiedades" (párrafo 3.) y "clasificación" (párrafo 4.) de los poliedros Arquimedianos. También en su párrafo 5. han sido reseñados los distintos "procesos de obtención" de los mismos, a aplicar sobre los cinco poliedros regulares convexos.

Estos procesos, aplicados sistemáticamente a cada uno de los poliedros regulares convexos, dan lugar a la formación de un "poliedro núcleo convexo" que en general es un "Arquimediano" y en algunos casos particulares es un "poliedro regular convexo, conjugado del generador"

2.) RESUMEN DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS OBTENIDOS POR EL PROCESO DE "TRUNCADURA DE VÉRTICES."

La operación geométrica denominada "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de un poliedro regular convexo, ha sido definida en el párrafo 2) del ESTUDIO PREVIO al ejercicio M-39.5 y aplicada sistemáticamente a cada uno de los cinco poliedros regulares convexos, en posteriores ejercicios.

A continuación resumimos los resultados obtenidos:

2.1) POLIEDROS NÚCLEOS OBTENIDOS POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "TETRAEDRO REGULAR CONVEXO P_4" DE ARISTA "a_4" A LA DISTANCIA "x"

2.11) Para "$x = \frac{1}{3} a_4$", se obtiene el ARQUIMEDIANO VII formado por $4 C_3 + 4 C_6$ (ver Lámina 39).- Modelo M-39.5

2.12) Para "$x = \frac{1}{2} a_4$", se obtiene el OCTAEDRO REGULAR CONVEXO formado por $8 C_3$ (Ver Lámina 3).- Modelo M-3.7

2.13) Para "$x = \frac{3}{5} a_4$", se obtiene el ARQUIMEDIANO VII formado por $4 C_3 + 4 C_6$ (Ver Lámina 39).- Modelo M-39.7.

2.14) Para "$x = \frac{2}{3} a_4$", se obtiene el TETRAEDRO REGULAR CONVEXO formado por $4 C_3$ (Ver Láminas 1 y 6).- Modelos M-1.13 y M-6.2.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1982



2.2) POLIEDROS NÚCLEOS, OBTENIDOS POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "EXAEDRO REGULAR CONVEXO P_6" DE ARISTA "a_6" A LA DISTANCIA "x".

2.21) Para "$x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} a_6$", se obtiene el ARQUIMEDIANO VIII, formado por $8 C_3 + 6 C_8$ (Ver Lámina 40).- Modelo M - 40.5.

2.22) Para "$x = \frac{1}{2} a_6$", se obtiene el ARQUIMEDIANO III, formado por $8 C_3 + 6 C_4$ (Ver Lámina 35).- Modelo M - 35.5

2.23) Para "$x = \frac{3}{4} a_6$", se obtiene el ARQUIMEDIANO X, formado por $6 C_4 + 8 C_6$ (Ver Lámina 42).- Modelo M - 42.5

2.24) Para "$x = a_6$", se obtiene el OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, formado por $8 C_3$ (Ver Láminas 3 y 7).- Modelo M - 3.8 y M - 7.2.

2.3) POLIEDROS NÚCLEOS OBTENIDOS POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "OCTAEDRO REGULAR CONVEXO P_8" DE ARISTA "a_8" A LA DISTANCIA "x".

2.31) Para "$x = \frac{1}{3} a_8$", se obtiene el ARQUIMEDIANO X formado por $6 C_4 + 8 C_6$ (Ver Lámina 42). Mode-

UNE A4 210 x 297



lo M-42.7

2.32) Para "$x = \frac{1}{3} a_8$", se obtiene el ARQUIMEDIANO III, formado por $8 C_6 + 6 C_4$ (Ver Lámina 35).- Modelo M-35.7.

2.33) Para "$x = (2-\sqrt{2})\, a_8$", se obtiene el ARQUIMEDIANO VIII, formado por $8 C_3 + 6 C_8$ (Ver Lámina 40).- Modelo M-40.7

2.34) Para "$x = \frac{2}{3} a_8$", se obtiene el "EXAEDRO REGULAR CONVEXO, formado por $6 C_4$ (Ver Láminas 2 y 6).- Modelos 2.24 y 8.2

2.4) POLIEDROS NÚCLEOS OBTENIDOS POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "DODECAEDRO REGULAR CONVEXO P_{12}" DE ARISTA "a_{12}" A LA DISTANCIA "x".

2.41) Para "$x = \frac{5-\sqrt{5}}{10} a_{12}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO IX, formado por $20 C_3 + 12 C_{10}$ (Ver Lámina 41).- Modelo M-41.5

2.42) Para "$x = \frac{1}{2} a_{12}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO IV, formado por $20 C_3 + 12 C_5$ (Ver Lámina 36).- Modelo M-36.5

UNE A4 210 x 297

Álvarez Febrero 1982



2.43) Para "$x = \frac{27+3\sqrt{5}}{38} a_{12}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO XIII, formado por $12\ C_5 + 20\ C_6$ (Ver Lámina 45). Modelo M-45.5

2.44) Para "$x = \frac{5+\sqrt{5}}{5} a_{12}$", se obtiene el ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, formado por $20\ C_3$ (Ver Láminas 4 y 9).- Modelos 4.17 y 9.2

2.5) POLIEDROS NÚCLEOS OBTENIDOS POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO P_{20}", DE ARISTA "a_{20}" A LA DISTANCIA "x"

2.51) Para "$x = \frac{1}{3} a_{20}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO XIII, formado por $12\ C_5 + 20\ C_6$ (Ver Lámina 45).- Modelo M-45.7

2.52) Para "$x = \frac{1}{2} a_{20}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO IV, formado por $20\ C_3 + 12\ C_5$ (Ver Lámina 36) Modelo M-36.7

2.53) Para "$x = \frac{15-\sqrt{5}}{22} a_{20}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO IX, formado por $20\ C_3 + 12\ C_{10}$ (Ver Lámina 41) Modelo M-41.7

2.54) Para "$x = \frac{2}{3} a_{20}$", se obtiene el DODECAEDRO RE-



Modelo M - 42.9

GULAR CONVEXO, formado por 20 C_5 (Ver láminas 5 y 10).- Modelo 5.7 y 10.2

3) RESUMEN DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS OBTENIDOS POR EL PROCESO DE "TRUNCADURA DE VÉRTICES" SEGUIDO DE "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" (O VICEVERSA).

Los Arquimedianos obtenidos por este proceso, que reseñamos a continuación, son aquellos en que los planos secantes π_1 y π_2 de ambas truncaduras, al cortar el plano de cada cara del poliedro generador, forman en ellas polígonos regulares convexos semejantes a la de la cara, siendo paralelos los lados de ambos polígonos (el de la cara y el engendrado).

Pueden obtenerse también por este mismo proceso, poliedros Arquimedianos diferentes a los anteriores, que ya estudiaremos posteriormente, en el párrafo 4) siguiente.

3.1) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "TETRAEDRO REGULAR CONVEXO P_4" DE ARISTA "a_4" A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "y" $(x = 2y)$

Para "$x = \frac{1}{2} a_4$" e "$y = \frac{1}{4} a_4$", se obtiene el ARQUIMEDIANO III, formado por $8 C_3 + 6 C_4$ (Ver lámina 35.- Modelo M -35.10

UNE A4 210 x 297

Tarrés   Febrero 1982

		Modelo M-42.9

3.2) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "EXAEDRO REGULAR CONVEXO P_6" DE ARISTA "a_6" A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "y" $(x = 2y)$

Para "$x = (2-\sqrt{2})\, a_6$" e "$y = \frac{2-\sqrt{2}}{2} a_6$", se obtiene el ARQUIMEDIANO V, formado por $8\, C_3 + 18\, C_4$ (Ver lámina 37.- Modelo M-37.5

3.3) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "OCTAEDRO REGULAR CONVEXO P_8" DE ARISTA "a_8" A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "y" $(x = 2y)$

Para "$x = \frac{6-2\sqrt{2}}{7} a_8$" e "$y = \frac{3-\sqrt{2}}{7} a_8$", se obtiene el ARQUIMEDIANO V, formado por $8\, C_3 + 18\, C_4$ (Ver lámina 37.- Modelo M-37.6

3.4) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "DODECAEDRO REGURAR CONVEXO P_{12}", DE ARISTA "a_{12}" A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "y" $(x = 2y)$

UNE A4 21C x 297

Calvario Febrero 1982



Para "$x = \frac{2}{3}\, a_{12}$" e "$y = \frac{1}{3}\, a_{12}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO VI, formado por $20\, C_3 + 30\, C_4 + 12\, C_5$ (Ver lámina 38.- Modelo M-38.5

3.5) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO P_{20}", DE ARISTA "a_{20}" A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "y" ($x = 2y$)

Para "$x = \frac{7-\sqrt{5}}{11}\, a_{20}$" e "$y = \frac{7-\sqrt{5}}{22}\, a_{20}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO VI, formado por $20\, C_3 + 30\, C_4 + 12\, C_5$ (Ver lámina 38.- Modelo M-38.6

4). NUEVOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS DIFERENTES A LOS RESUMIDOS EN EL PÁRRAFO 3) E IGUALMENTE OBTENIDOS POR EL PROCESO DE "TRUNCADURA DE VÉRTICES" SEGUIDO DE "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" (O VICEVERSA).

La operación geométrica denominada "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de un poliedro regular convexo, fué definida y estudiada en el ESTUDIO PREVIO, correspondiente al modelo M-39.5.

La operación geométrica denominada "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS", fué a su vez definida y estudiada en el ESTUDIO PREVIO, correspondiente al modelo M-35.10.

También estudiamos en el mencionado EJERCICIO PREVIO al



modelo M-35.10 que la aplicación a un poliedro regular convexo de una "Truncadura paralela de aristas", seguida de una "truncadura de vértices" (o viceversa), daba lugar a la formación de un POLIEDRO NÚCLEO cuyas característi-cas geométricas se detallaban en el párrafo 3) de dicho modelo M-35.10. También vimos que en una "posición especial" de los planos π_1 y π_2 de las dos Truncaduras, el poliedro núcleo resultante se transforma en un POLIEDRO ARQUIMEDIANO", en el que las caras de éste, que se forman sobre las del poliedro regular generador, tienen por contornos polígonos regulares semejantes, concéntricos y de lados paralelos.

No obstante, y según veremos seguidamente, puede existir otras posiciones distintas de los planos secantes π_1 y π_2 que den lugar a la formación en las caras del poliedro regular generador, de polígonos regulares de doble número de lados que los de éste, con lados alternativos paralelos. Los polígonos de las caras del poliedro generador P_n y estos últimos (generados), serán concéntricos

En efecto: Supongamos (fig. 1) una cara ABC---DEA de un poliedro regular convexo, en cuyos vértices efectuamos una "truncadura paralela de aristas" producida por planos "π_1", a la distancia "y" de sus vértices. Dichas Truncaduras darán lugar a la formación del polígono A'B'C'--- D'E'A'.
Los polígonos regulares ABC---DEA y A'B'C'--- D'E'A' serán pues, por construcción, semejantes, concéntricos y de lados paralelos.



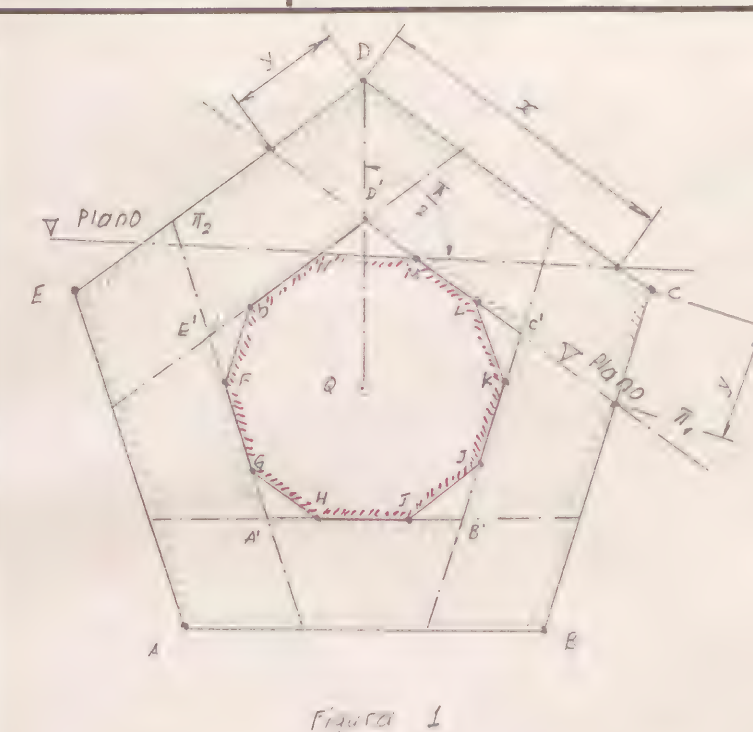


Figura 1

Imaginemos a continuación que efectuamos una truncadura de vértices producida por planos π_2 a la distancia "x" de sus vértices. Estas nuevas truncaduras darán lugar a la formación del polígono FGHI--- MNOF, equiángulo y concéntrico con el primitivo ABC--- DEA, siendo sus lados alternativos FG, HI, JK, LM, NO, paralelos a EA, AB, BC, CD, DE respectivamente, y los restantes lados, perpendiculares a los radios AQ, BQ, CQ, DQ, EQ. En una "<u>posición especial</u>" de las truncaduras fijadas por las cotas "x" e "y", el polígono FGHI... MNOF, puede ser regular, en cuyo caso el poliedro núcleo resultante al aplicar sucesivamente ambas truncaduras, será un poliedro ARQUIMEDIANO, de las siguientes características geométricas:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas y los "π_2" de la de vértices, dan lugar en sus mutuas intersecciones a la formación, en <u>las caras</u> ABC--- DEA <u>del poliedro generador</u>, de polígonos regulares convexos FGH......NOF de <u>doble número de lados</u> que los <u>de dichas caras</u>, que a su vez son <u>concéntricos con ellas</u> y de lados <u>alternativamente paralelos</u>.

b) Igualmente, dichos planos secantes "π_1" y "π_2", formarán con sus mutuas intersecciones, en cada vértice del poliedro generador, nuevos polígonos regulares cuyo número de lados será el doble del número de caras que concurren en cada vértice, y situados en el plano "π_2" (fig. 2).

c) Finalmente, los planos secantes "π_1", al cortar a dos caras contiguas, darán lugar a la formación de cuadrados paralelos a las aristas y situados en el plano "π_1"

El conjunto de las caras limitadas por los polígonos descritos en a), b) y c), forman un POLIEDRO ARQUIMEDIANO.

Como resumen de lo expuesto anteriormente, podemos establecer que una posición especial de los planos "π_1" y "π_2" en una "Truncadura paralela de aristas" seguida de una "Truncadura de vértices" de cualquier poliedro regular convexo, da lugar a la formación de un POLIEDRO ARQUIMEDIANO.

En el estudio analítico que realizamos a continuación obtendremos fórmulas generales de los valores "y" y "x" en dicha posición especial, así como de las magnitudes de



sus respectivas aristas y otras magnitudes necesarias para la construcción de dichos ARQUIMEDIANOS.

---

5) ESTUDIO ANALÍTICO DE MAGNITUDES DE POLIEDROS ARQUIMEDIANOS DERIVADOS DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS, NECESARIAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MISMOS.

Como consecuencia de lo expuesto en el párrafo 4) de este ESTUDIO PREVIO, deducimos las siguientes relaciones métricas:

Sea (fig. 2) p.e. ABC... una cara de un poliedro P_n regular convexo generador de arista "a_n" ($n = 4, 6, 8, 12, 20$) y centro Q (en el ejemplo de la figura 2, $n = 4, 8, ó\ 20$ y P_n, tetraedro, octaedro o icosaedro). Unamos "Q" con sus "p" vértices ($p = 3, 4, 5$) A, B, C, ... los segmentos $\overline{QA}$, $\overline{QB}$, $\overline{QC}$... serán todos iguales; bisectrices de los ángulos $\measuredangle AQC$,

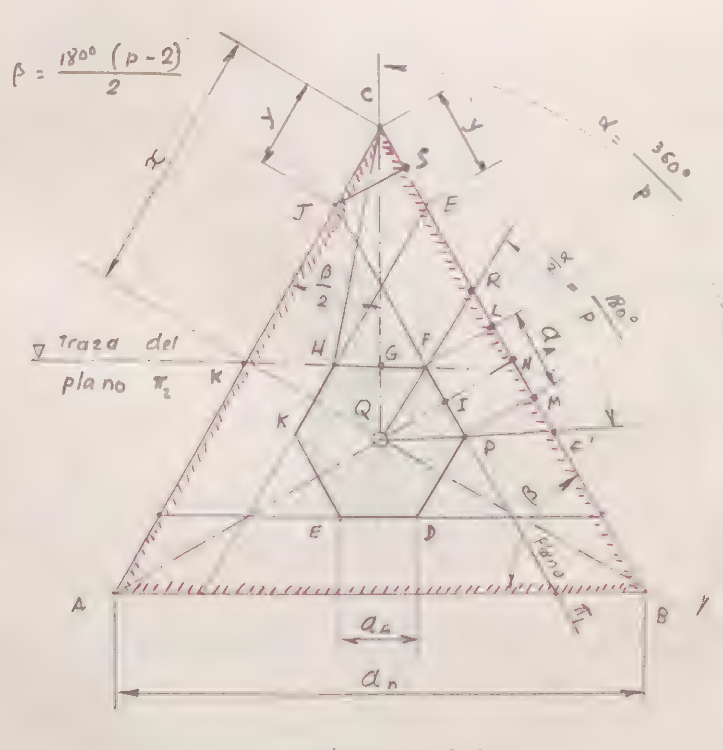


Figura nº 2

$\measuredangle CQB$, $\measuredangle BQA$ y mediatrices de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$... de los polígonos regulares de "p" lados. Los ángulos centrales de estos polí-

gonos tendrán una amplitud $\alpha = \frac{360°}{p}$. La de los án-gulos interiores de los mismos, otra de $\beta = \frac{180°}{p} = \frac{\alpha}{2}$.

Construyamos a continuación un polígono regular convexo de lado arbitrario, y de doble número de lados que el que limita la cara ABC..., y situemos dicho polígono, concéntrico con éste de forma que los lados alternativos del primero sean paralelos a los del segundo (polígono HFPDEK y centro Q). Con esta construcción los radios QA, QB, QC ---- del polígono de la cara serán perpendiculares a cada par de lados opuestos del polígono construido.

Prolonguemos dos segmentos consecutivos ($\overline{HF}$ y $\overline{FP}$ p.e.) hasta que corten a los lados del polígono ABC.... de la cara con lo que se obtendrán los puntos K y J en el lado AC. Los segmentos $\overline{CJ} = y$ y $\overline{CK} = x$ fijarán las posiciones de los planos π_1 y π_2 de la truncadura de vértices y aristas respectivamente. Tracemos también por F, J y P perpendiculares al lado CB, lo que nos determinará los puntos L, S, M, siendo el segmento $\overline{LM} = a_\Delta$. Uniendo los vértices F y P con el centro Q, se nos formará el ángulo central $\widehat{FQP}$, cuya amplitud será: $\measuredangle FQP = \frac{360°}{2p} = \frac{360°}{p} : 2 = \frac{\alpha}{2} = \frac{180°}{p}$

Consideremos ahora, en el poliedro regular generador P_n, la cara contigua a la ABC... de arista común $\overline{BC}$, y en la que suponemos efectuadas todas las construcciones realizadas en la ABC... Ambas caras formarán entre sí un ángulo diédrico "2φ" medido por su rectilíneo correspondiente.

[illegible] Abril 19[illegible]



Modelo M-42.9

En la figura 3 representamos el diedro que forman dos caras ligadas de arista común $\overline{BC}$ (fig. 2), por su rectilíneo correspondiente "2φ". (φ es distinto en cada poliedro generador).

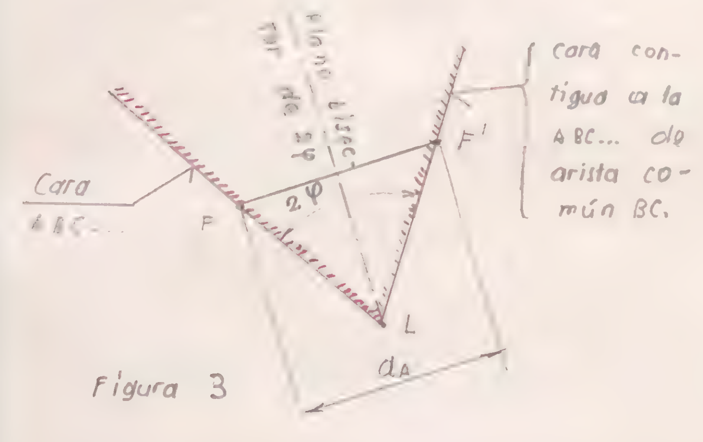


Figura 3

Traslademos a esta figura 5, a partir de L, el segmento FL de la figura 4, y determinemos a continuación el punto F', simétrico del F con respecto al plano bisector del diedro 2φ.

El segmento $\overline{FF'}$ será uno de los lados de las caras cuadradas producidas por el proceso c) del párrafo 4.

Teniendo presente ahora los conceptos desarrollados en el párrafo 4 con sus figuras aclaratorias nº 2 y 3, calculamos seguidamente las siguientes magnitudes:

4.1) ARISTA "a_A" DEL ARQUIMEDIANO NÚCLEO.

Del triángulo isósceles FLF' de la figura 3, se deduce:

a) $\overline{FL} \operatorname{sen} \varphi = \frac{\overline{FF'}}{2}$

Establezcamos ahora la condición de ser (fig. 2 y 3)

b) $\overline{FF'} = \overline{FP} = a_A$

UNE A4 210 x 297

Tavares Abril 1982



De las fórmulas a) y b) se deduce:

c) $\overline{FL} = \dfrac{\overline{FF'}}{2} : \text{sen}\,\varphi = \dfrac{a_A}{2\,\text{sen}\,\varphi}$

De la figura 2, se deduce:

d) $\overline{QN} = \overline{QI} + \overline{IN}$ en la que

e) $\overline{QN} = \overline{NB}\ \text{ctg} \angle NQB = \dfrac{a_n}{2}\ \text{ctg}\ \dfrac{\alpha}{2}$

f) $\overline{QI} = \overline{IP} \times \text{ctg} \angle IQP = \dfrac{a_A}{2}\ \text{ctg}\ \dfrac{\alpha}{4}$ y también: (ver c)

g) $\overline{IN} = \overline{FL} = \dfrac{a_A}{2\,\text{sen}\,\varphi}$

Sustituyendo en d) los valores e), f) y g), tendremos la ecuación:

h) $$\frac{a_n}{2}\ \text{ctg}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{a_A}{2}\ \text{ctg}\ \frac{\alpha}{4} + \frac{a_A}{2\,\text{sen}\,\varphi} = a_A \left[\frac{\text{ctg}\ \frac{\alpha}{4}}{2} + \frac{1}{2\,\text{sen}\,\varphi} \right]$$

y despejando en ésta el valor de "a_A", tendremos finalmente:

$$\boxed{a_A} = \frac{a_n\ \text{ctg}\ \frac{\alpha}{2}}{2} : \left[\frac{\text{ctg}\ \frac{\alpha}{4}}{2} + \frac{1}{2\,\text{sen}\,\varphi} \right] = \frac{\text{ctg}\ \frac{\alpha}{2} : 2}{\frac{\text{ctg}\ \frac{\alpha}{4}}{2} + \frac{1}{2\,\text{sen}\,\varphi}}\ a_n =$$

$$= \frac{\frac{\text{ctg}\ \frac{\alpha}{2}}{2}}{\frac{\text{ctg}\ \frac{\alpha}{4} \times 2\ \text{sen}\,\varphi + 2}{4\ \text{sen}\,\varphi}}\ a_n = \frac{\text{ctg}\ \frac{\alpha}{2} \times 4\ \text{sen}\,\varphi}{\text{ctg}\ \frac{\alpha}{4} \times 4\ \text{sen}\,\varphi + 4}\ a_n = \boxed{\frac{\text{ctg}\ \frac{\alpha}{2} \times \text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\varphi\ \text{ctg}\ \frac{\alpha}{4} + 1}\ a_n}$$

de donde finalmente deducimos la fórmula general

(sigue)

UNE A4 210 x 297

Modelo M-42.9

$$a_1 = \frac{ctg \frac{\alpha}{2} \times sen\, \varphi}{sen\, \varphi \times ctg \frac{\alpha}{2} + 1}\, \sigma_n \qquad (1)$$

4.2) DISTANCIA "y" QUE FIJA LA POSICIÓN DEL PLANO SECANTE "π_1" EN LA TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS.

De la figura 2, obtenemos las siguientes relaciones:

En el triángulo CJS, tendremos

a) $\overline{CJ} = JS : sen \measuredangle JCS = \frac{\overline{JS}}{sen\, \beta} = y$

También es:

b) $\overline{JS} = \overline{IN} = \overline{QN} - \overline{QI}$

y siendo

c) $\overline{QN}$ = Radio de la circunferencia inscrita al polígono ABC... de la cara de "p" lados = r_{ci}^{p} y también

d) QI = Radio de la circunferencia inscrita al polígono interior de 2p lados = r_{ci}^{2p}

Sustituyendo los valores c) y d) en b), será

e) $\overline{JS} = r_{ci}^{p} - r_{ci}^{2p}$

y sustituyendo en a) el valor e), tendremos finalmente

$$y = \frac{r_{ci}^{p} - r_{ci}^{2p}}{sen\, \beta} \qquad (2)$$

UNE A4:210 x 297

Abril 1982



4.3) DISTANCIA "x" QUE FIJA LA POSICIÓN DEL PLANO SECANTE "Π_2" EN LA TRUNCADURA DE VÉRTICES.

Del triángulo rectángulo KCG de la figura 2, se deduce:

a) $$\overline{CK} = y = \frac{\overline{CG}}{\cos \measuredangle KCG} = \frac{CG}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

siendo β el ángulo interior del polígono de "p" lados de una cara del poliedro generador

b) $$\overline{CG} = \overline{CQ} - \overline{GQ}$$

en la que $\overline{CQ}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de la cara de "p" lados = r_{cc}^{p}. Y también $\overline{GQ}$ = Radio de la circunferencia inscrita al polígono interior de "2 p" lados = r_{ci}^{2p}. Sustituyendo estos valores en a) y b), tendremos finalmente

$$x = \frac{r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\cos \frac{\beta}{2}} \qquad (3)$$

4.4) ARISTA LATERAL "a_l" DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES QUE FIJAN LA POSICIÓN DE LOS VÉRTICES DEL POLIEDRO REGULAR GENERADOR "P_n", CON RESPECTO AL ARQUIMEDIANO GENERADO.

Dicha arista es el segmento $\overline{CH}$ de la figura 2, y a su vez hipotenusa del triángulo rectángulo CHG.



De la figura 2 se deduce

a) $CH = \sqrt{\overline{CG}^2 + \overline{HG}^2}$ en la que $\overline{CG} = \overline{CQ} - \overline{QG} = r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}$

y $HG = \frac{\overline{HF}}{2} = \frac{a_A}{2}$ y también $CH = a_\ell$

Sustituyendo valores en a), tendremos finalmente

$$a_\ell = \sqrt{\left(r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}\right)^2 + \left(\frac{a_A}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

Con los conceptos desarrollados en este ESTUDIO PREVIO, y aplicando a cada poliedro regular convexo P_n, las fórmulas generales (1), (2), (3) y (4), podemos construir el siguiente modelo M - 42.9 (P_4), correspondiente al enunciado explícito del mismo, que desarrollamos a continuación.

UNE A4 210 x 297

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO X" OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE ARISTA "a_4", A LA DISTANCIA "$y = \frac{1}{6} a_4$" SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE VÉRTICES (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "$x = \frac{1}{2} a_4$", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LAS DISTANCIAS "y" Y "x" RESPECTIVAMENTE.

EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro regular:

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm.}$$



	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-42.9

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO X", obtenido por "truncadura paralela de aristas" de un tetraedro regular convexo de arista "a_4", a la distancia "$y = \frac{1}{6} a_4$", seguida de una "truncadura de vértices" (o viceversa), a la distancia "$x = \frac{1}{2} a_4$", al tomar desde cada arista, y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente. El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el tetraedro regular convexo generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^4 = Radio de la esfera circunscrita al tetraedro regular generador:

$$r_{ec}^4 = 110 \text{ mm}$$

1). GENERALIDADES

En el ESTUDIO PREVIO realizado anteriormente, desarrollamos y aplicamos a continuación, una variante al proceso geométrico denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" de un poliedro regular convexo, diferente al estudiado en el ejercicio M-35.10.

Esta nueva aplicación de dicho proceso, da lugar también a la formación de un poliedro núcleo convexo, cuyas características geométricas, detallamos en el párrafo 4.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Abril 1982

En el caso especial descrito en este enunciado, dicho poliedro núcleo, es un ARQUIMEDIANO.

Las características geométricas de este Arquimediano, serán pues las siguientes:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas, y los "π_2" de la de vértices, dan lugar a la formación de 4 exágonos regulares de lado "$l_6 = a_\Delta$", situados en las caras del tetraedro generador.

b) Igualmente dichos planos "π_1" y "π_2" formarán con sus mutuas intersecciones, otros 4 exágonos regulares de lado "$l_6 = a_\Delta$", en cada vértice, e iguales a los anteriores

c) Los planos secantes "π_1" producen a su vez 6 cuadrados paralelos a las aristas, situados en "π_1" y de lado "$l_4 = a_\Delta$"

Por consiguiente, el poliedro núcleo estará limitado por OCHO CARAS EXAGONALES REGULARES, Y SEIS CUADRADAS todas de igual lado.

Estas son las características geométricas del ARQUIMEDIANO X, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº... Lámina 42, que detallamos en la siguiente página:

UNE A4 210 x 297

Álvarez Abril 1982



Modelo M-42.9

ARQUIMEDIANO X

1) Número de caras exagonales............ $C_6 = 8$

2) Número de caras cuadradas............ $C_4 = 6$

3) Número de vértices............ $V = 24$

4) Número de aristas............ $A = 36$

5) Número de caras en cada vértice...... $2C_6 + 1C_4$

---

2) POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1" con los que se obtiene la "Truncadura paralela de aristas, y la de los "π_2" para la "Truncadura de vértices" con respecto al poliedro generador, se obtiene mediante las distancias "y" y "x" respectivamente, tomadas sobre las aristas y a partir de sus vértices. Para esto se han obtenido anteriormente, fórmulas generales que aplicaremos a este ejercicio.

2.1) Distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la truncadura paralela de aristas:

Se obtiene, en función de la arista "a_4" del poliedro generador, de la fórmula general (2), deducida en el estudio previo). Su valor, es:

UNE A4 210 x 297



$$y = \frac{r_{ci}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\operatorname{sen} \beta} \, a_n \qquad (5)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al tetraedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del tetraedro = 4

b) p = Número de lados de los polígonos de una cara del tetraedro generador = 3

c) $r_{ci}^{p} = r_{ci}^{3}$ = Radio de la circunferencia inscrita al triángulo de una cara del tetraedro, de lado "a_4"

d) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6}$ = Radio de la circunferencia inscrita al exágono regular de una cara del Arquimediano X, de arista "a_X"

e) β = Ángulo interior del polígono de una cara

$$= \frac{180}{3} = 60^\circ$$

De estos valores se deduce:

f) $\boxed{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{sen} 60^\circ = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ (Ver G.P. 1006)

g) $\boxed{r_{ci}^{p}} = r_{ci}^{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6} a_4}$ (Ver G.P. 1.400-42 (3))

h) $\boxed{r_{ci}^{2p}} = r_{ci}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{a_X} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{6} a_4 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{12} a_4}$ (Ver G.P. 1400-45 (3))

UNE A4 210 x 297

[signature] Abril 1982



(El valor de $a_x = \frac{1}{6} a_4$ se deduce posteriormente en el párrafo 3.21).

Sustituyendo los valores f), g), h) en (2), tendremos:

$$\boxed{y} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a_4 - \frac{\sqrt{3}}{12} a_4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{12} : \frac{\sqrt{3}}{2} a_4 = \boxed{\frac{1}{6} a_4}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{y = \frac{1}{6} a_4}$$

Este valor de "y" justifica el expresado en el enunciado

2.2) Distancia "x" que fija la posición del plano "π_2" en la Truncadura de vértices.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del poliedro generador, de la fórmula general (3) deducida en el estudio previo.

$$\boxed{x = \frac{r_{ce}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\cos \frac{\beta}{2}}} \qquad (3)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al tetraedro regular generador:

a) n = Número de caras del Tetraedro = 4



Modelo M- 42.9

b) $a_n = a_4$ = Arista del tetraedro

c) p = Número de lados de los polígonos de las caras del tetraedro generador = 3

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{3}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de una cara del Tetraedro, de lado "a_4".

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6}$ = Radio de la circunferencia inscrita al exágono regular de una cara del Arquimediano X, de arista "a_x"

f) β = Angulo interior de una cara del tetraedro $= \frac{180°}{3} = 60°$

De estos valores se deduce

g) $\cos \frac{\beta}{2} = \cos \frac{60°}{2} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ver G.P. 1.006)

h) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} a_4$ (Ver G.P. 1.400-42 (2))

i) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{6} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{12}$ (Ver G.P. 1400-45 (3))

(El valor de $a_x = \frac{1}{6} a_4$ se deduce posteriormente en el párrafo 3.21)

Sustituyendo los valores g), h), i), en (3), tendremos:

$$x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} a_4 - \frac{\sqrt{3}}{12} a_4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} : \frac{\sqrt{3}}{2} a_4 = \boxed{\frac{1}{2} a_4}$$

de donde se obtiene finalmente

UNE A4 210 x 297

Abril 1982



$$x = \frac{1}{2} a_4$$

Este valor de "x" justifica el expresado en el enunciado.

3) CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo son necesarias las siguientes piezas:

3.1) TETRAEDRO REGULAR GENERADOR, DE CARAS VACIADAS

Su valor se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4$", deducida en el ejercicio G.E. nº --- Lámina 1. Despejando en ella "a_4", será:

$$a_4 = r_{ec}^4 : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{4}{\sqrt{6}} r_{ec}^4 = \frac{4\sqrt{6}}{6} r_{ec}^4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a los de la figura 1 del ejercicio M - 1.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a los de la figura 2 del ejercicio M - 1.102

UNE A4 210 x 297

[signature] Abril 1982



3.2) ARQUIMEDIANO X (NÚCLEO DEL TETRAEDRO GENERADOR), DE CARAS MACIZAS, INCLUIDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL TETRAEDRO GENERADOR A LAS CARAS EXAGONALES DEL ARQUIMEDIANO X.

3 - 2.1) Longitud "a_x" de la arista del Arquimediano X engendrado por el tetraedro regular P_4.

Se obtiene, en función de la arista "a_4" del tetraedro generador, de la fórmula (1) deducida en el estudio previo

$$a_A = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} + 1} a_n \qquad (1)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al tetraedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del tetraedro = 4

b) $a_n = a_4$ = Arista del tetraedro

c) α = Angulo central del triángulo de una cara del tetraedro $= \frac{360°}{3} = 120°$

d) φ = Semiángulo del diedro formado por dos caras contiguas del tetraedro

De estos valores se deduce:

e) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Ver G.P. nº.... Lámina 1)

UNE A4 210 x 297

Calvarez Abril 1982



Modelo M - 42.9

f) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \frac{120^\circ}{2} = \operatorname{ctg} 60^\circ = 1 : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Ver G.P. 1.006)

g) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} = \operatorname{ctg} \frac{120^\circ}{4} = \operatorname{ctg} 30^\circ = 1 : \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (Ver G.P. 1006)

Sustituyendo lo valores e), f), g) en (1), tendremos:

$$\boxed{a_{\underline{X}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + 1} a_4 = \frac{\frac{1}{3}}{2} a_4 = \boxed{\frac{1}{6} a_4}$$

Puede obtenerse "$a_{\underline{X}}$" en función de r_{ec}^4 (dato de este modelo), sustituyendo "$a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4$". - Este valor se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4$" deducida en el ejercicio G.E. nº... Lámina 1 despejando en ella "a_4". Sustituyendo dicho valor, tendremos:

$$\boxed{a_{\underline{X}}} = \frac{1}{6} a_4 = \frac{1}{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{9} r_{ec}^4}$$

El valor numérico de la arista a_X, se obtiene de la fórmula anterior

$$a_{\underline{X}} = \frac{\sqrt{6}}{9} \times 110 \cong 0,27\,21\,65\,52\,7 \ldots \times 110 \cong 29.9 \cong 30.0 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES

8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 1

UNE A4 210 x 297



Modelo M - 42.9

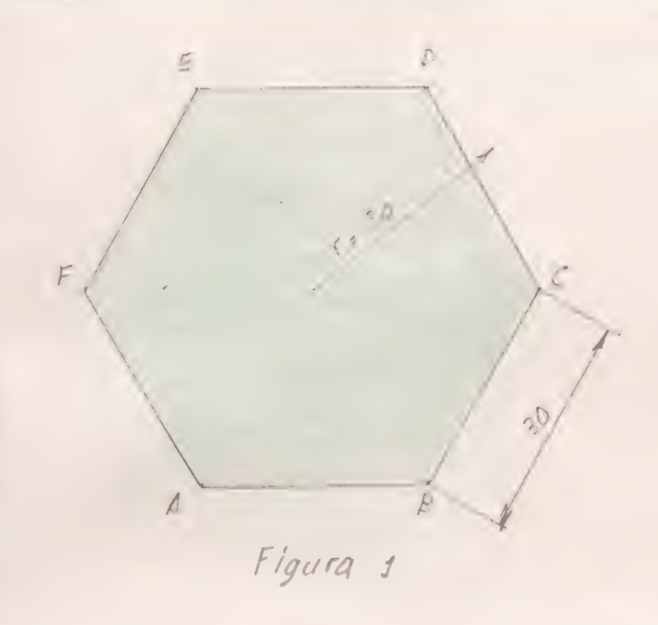


Figura 1

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = 30$

PIEZA N° 3

8(u)

Figura 1

PIEZA N° 4 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades

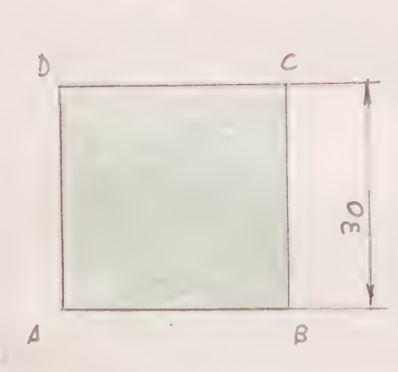


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA . N° 4 6 (u)

Figura 2

PIEZA N° 5 UNIONES ARISTAS 36 unidades

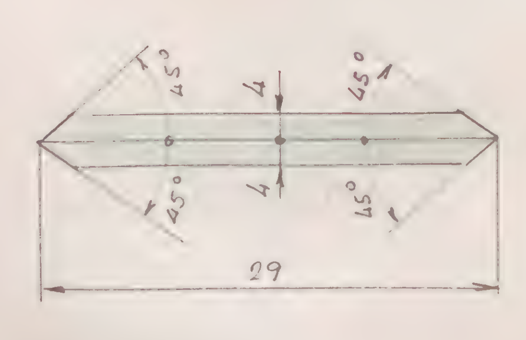


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA N° 5

36 (u)

Figura 3

Alvarez Abril 1982



PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES

8 unidades

E D F C A B
5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5
$r_{cc}^{6} = 30$
30

Figura 4

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 6 8 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

6 unidades

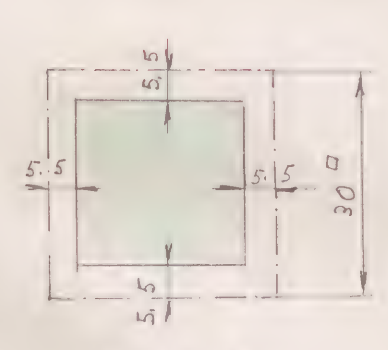


Figura 5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 6 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS EXAGONALES

16 unidades

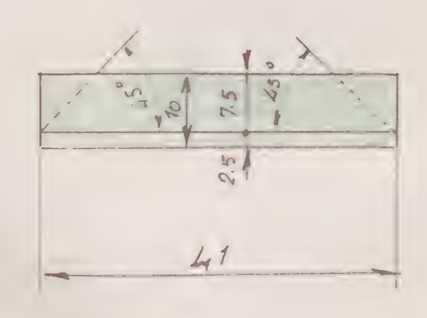


Figura 6

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 8 16 (u)

Figura 6

UNE A4 210 x 297



PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES

8 unidades

Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 9 8 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADA EN CARAS CUADRADAS

6 unidades

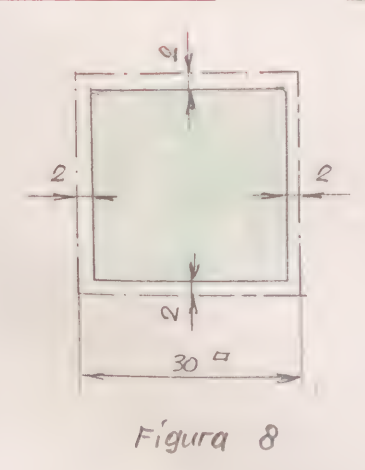


Figura 8

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 10 6 (u)

Figura 10

3.- 2.2) Arista lateral "a_l" de las pirámides auxiliares exagonales que fijan la posición de los vértices del tetraedro generador con respecto al ARQUIMEDIANO X.

Se obtiene, en función de la arista "a_n" del tetraedro generador, de la fórmula (4), deducida en el estudio previo.

$$a_l = \sqrt{\left(r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}\right)^2 + \left(\frac{a_A}{2}\right)^2} \qquad (4)$$



Modelo M-42.9

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al tetraedro regular generador:

a) n = Número de caras del tetraedro. = 4

b) $a_n = a_4$ = Arista del tetraedro

c) p = Número de lados de los polígonos de las caras del tetraedro = 3

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{3}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de una cara del tetraedro, de lado "a_4"

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6}$ = Radio de la circunferencia inscrita al exágono regular de una cara del Arquimediano X, de arista "a_x"

f) a_A = Arista del Arquimediado

De estos valores se deduce

g) $a_A = a_x = \frac{1}{6} a_4$ (Ver párrafo 3-2.1)

h) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} a_4$ (Ver G.P. 1.400-42 (2))

i) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{6} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{12} a_4$ (Ver G.P. 1400-45 (3))

Sustituyendo los valores g), h), i), en (4), tendremos:

$$\boxed{a_\ell} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} a_4 - \frac{\sqrt{3}}{12} a_4\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{6} a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)^2 a_4^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 a_4^2} =$$

UNE A4 210 x 297

Olivares Dbre 1982



$$= \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2}\, a_4 = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \frac{1}{12^2}}\, a_4 = \sqrt{\frac{27}{12^2} + \frac{1}{12^2}}\, a_4 =$$

$$= \frac{\sqrt{28}}{12}\, a_4 = \frac{2\sqrt{7}}{12}\, a_4 = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{6}\, a_4}$$

Puede obtenerse " a_ℓ " en función de r_{ec}^4. (dato de este ejercicio), sustituyendo " $a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4$ ", valor obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio. Así pues será:

$$\boxed{a_\ell} = \frac{\sqrt{7}}{6}\, a_4 = \frac{\sqrt{7}}{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 = \cdots\cdots\cdots = \boxed{\frac{\sqrt{42}}{9} r_{ec}^4}$$

Su valor numérico, será:

$$\boxed{a_\ell} = \frac{\sqrt{42}}{9} r_{ec}^4 \cong 0.72\,00\,82\,30\,0\ldots \times 110 \cong \boxed{79,2 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 11 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIADES EXAGONALES . 4 unidades

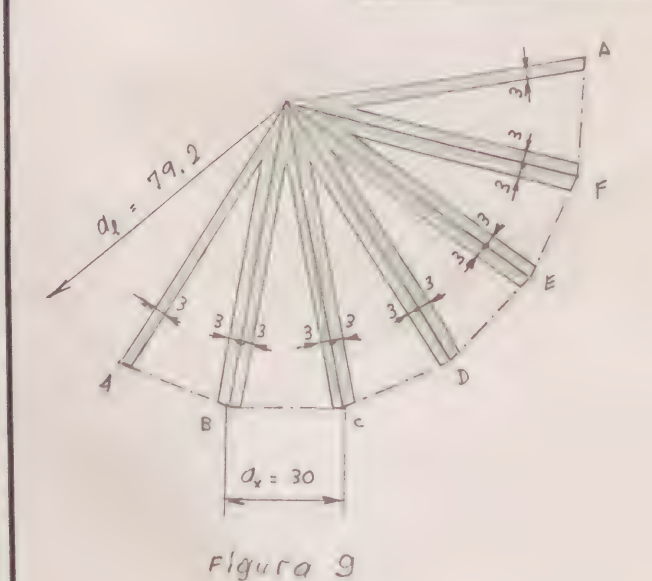


Figura 9

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = 30$ mm

PIEZA Nº 11 4 (u)

Figura 9



Modelo M-42.9

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES EXAGONALES

24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 11 24 (u)

Figura 10

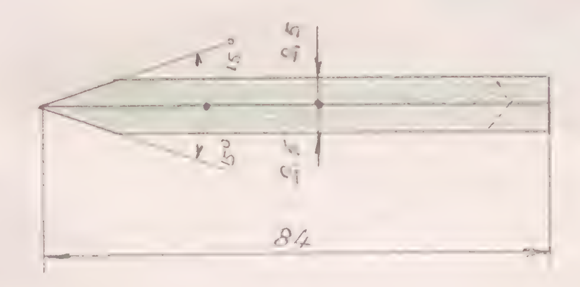
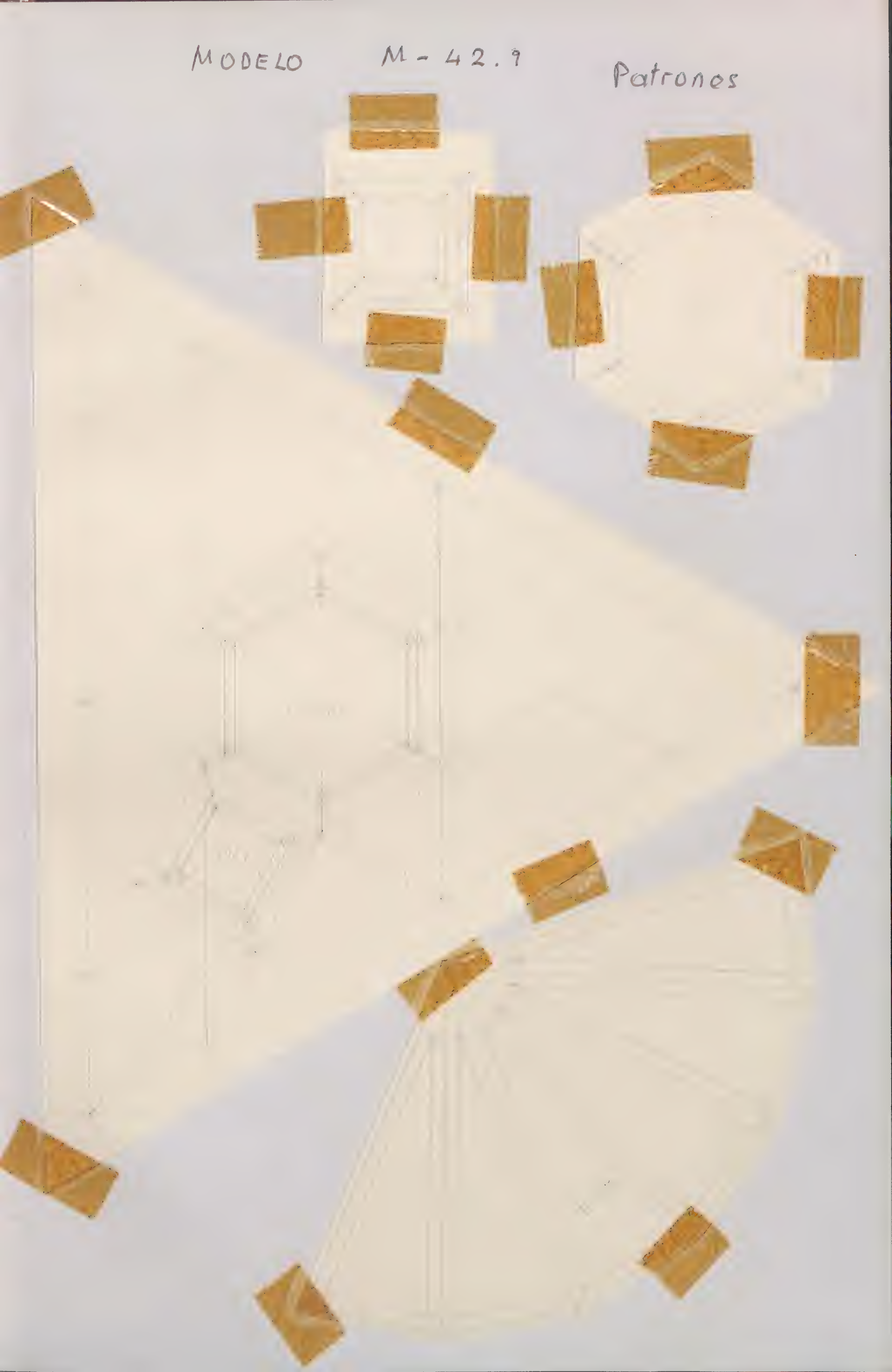


Figura 10

UNE A4 210 x 297

Calvares Abril 1982


MODELO M-42.9
Patrones

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO XI", FORMADO POR OCHO CARAS EXAGONALES (C_6); DOCE CARAS CUADRADAS (C_4) Y SEIS CARAS OCTOGONALES (C_8), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1\ C_4$; $1\ C_6$ y $1\ C_8$.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XI} = 110 \text{ mm}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 43.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO XI", formado por ocho caras exagonales C_6; doce cuadradas C_4 y seis caras octogonales C_8, concurriendo en cada vértice $1\,C_4 + 1\,C_6 + 1\,C_8$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G.E. nº ....- Lámina 43, y representado en sus vistas principal, superior y lateral izquierda, a escala 1:1, siendo $r_{ec}^{XI} = 55$ mm.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita

$$r_{ec}^{XI} = 110 \text{ mm}$$

Las características geométricas de este Arquimediano XI, son:

1) Número de caras cuadradas $C_4 = 12$

2) Número de caras exagonales regulares $C_6 = 8$

3) Número de caras octogonales regulares $C_8 = 6$

4) Número de vértices $= \dfrac{12\times4 + 8\times6 + 6\times8}{3} = V = 48$

5) Número de aristas $= \dfrac{12\times4 + 8\times6 + 6\times8}{2} = A = 72$

6) Número de caras en cada vértice $1\,C_4 + 1\,C_6 + 1\,C_8$

Para obtener el despiece de este poliedro, calculemos previamente la longitud "a_{XI}" de la arista del mismo, en función del radio "r_{ec}^{XI}" de su esfera circunscrita.

Su valor se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{XI} = \dfrac{\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}}{2}\, a_{XI}$", tenien-

UNE A4 210 x 297

[illegible signature] Mayo 19[illegible]



da en el mencionado ejercicio G. E. n°....- Lámina 42. Despejando en ella a_{XI}, tendremos:

$$\boxed{a_{XI}} = r_{ec}^{XI} : \frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}\, r_{ec}^{XI} = \frac{2\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{13+6\sqrt{2}}\, r_{ec}^{XI} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{13+6\sqrt{2}}{(13+6\sqrt{2})^2}}\, r_{ec}^{XI} = 2\sqrt{\frac{1}{13+6\sqrt{2}}}\, r_{ec}^{XI} = \boxed{2\sqrt{\frac{13-6\sqrt{2}}{97}}\, r_{ec}^{XI}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_{XI}} = 2\sqrt{\frac{13-6\sqrt{2}}{97}} \times 110 \cong 0,43\,14\,78\,81\,1\ldots \times 110 \cong 47,46 \cong \boxed{47,5 \text{ mm}}$$

Esta sola magnitud nos permite la construcción del poliedro estudiado, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA N° 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS. 12 unidades

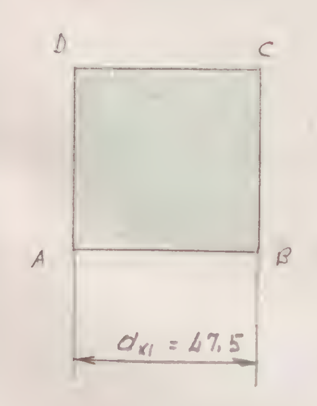


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA N° 1 12 (a)

Figura 1

Alvarez Mayo 1982

Modelo M-43.1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

8 unidades.

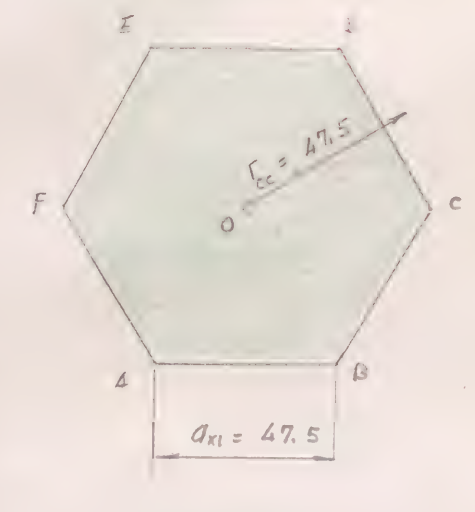


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 8(u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES OCTOGONALES REGULARES 6 unidades

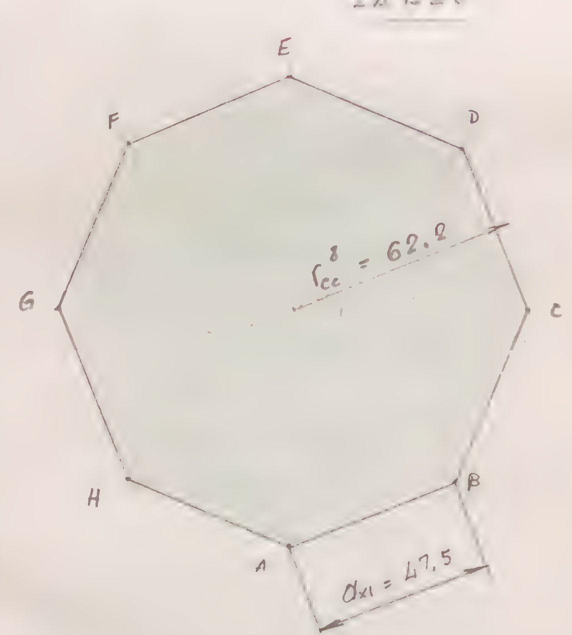


Figura 3

$r_{cc}^{8} = 1,3066 \times 47.5 = 62.2$ mm

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3

6(u)

Figura 3

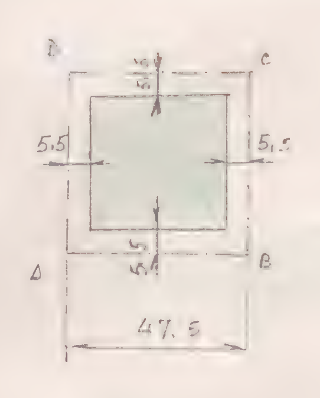
PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura nº 4

UNE A4 210 x 297

Calvaru Mayo 1982





PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES

8 unidades

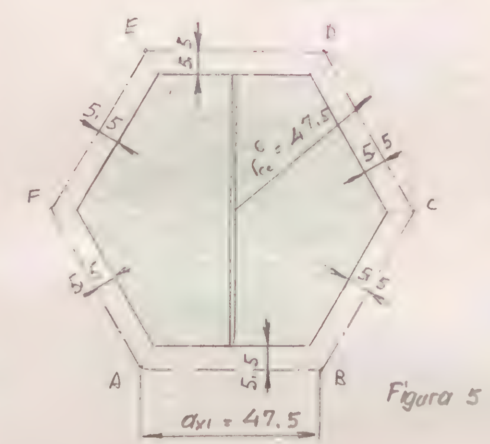


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono ABCDEF de la fig. 2 y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5 8 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS OCTOGONALES REGULARES

6 unidades



Figura 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono ABCD...EFGH de la figura 3, y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 6

6 (u)

Figura 6



Modelo M-43.1

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES

16 unidades

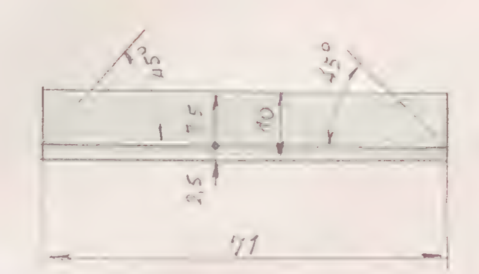


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 5

PIEZA Nº 7 16 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS OCTOGONALES REGULARES

24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación en la figura 6

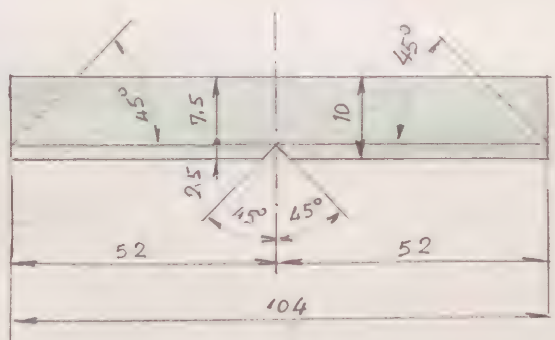


Figura 8

PIEZA Nº 8 24 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS

72 unidades

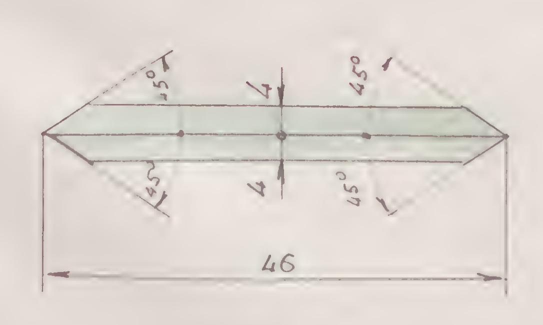


Figura 9

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 9 72 (u)

Figura 9

UNE A4 210 x 297

Mayo 1982

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

12 unidades

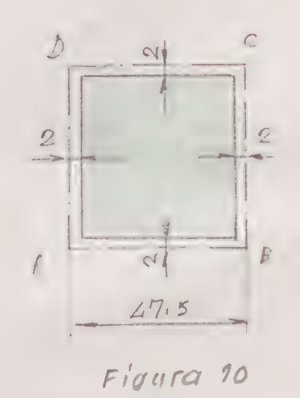


Figura 10

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 10.

PIEZA Nº 10 12 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 11 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES

8 unidades

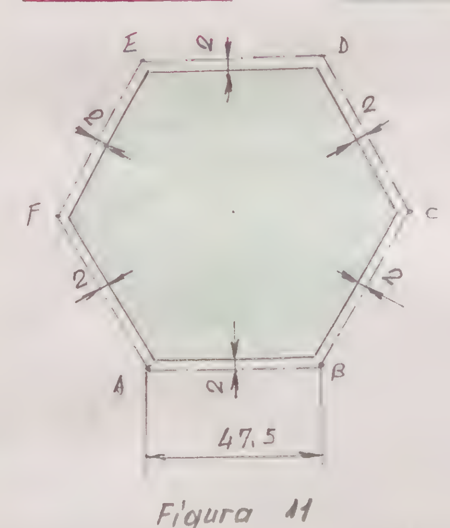


Figura 11

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 11 8 (u)

Figura 11

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO EN CARAS OCTOGONALES REGULARES

6 unidades

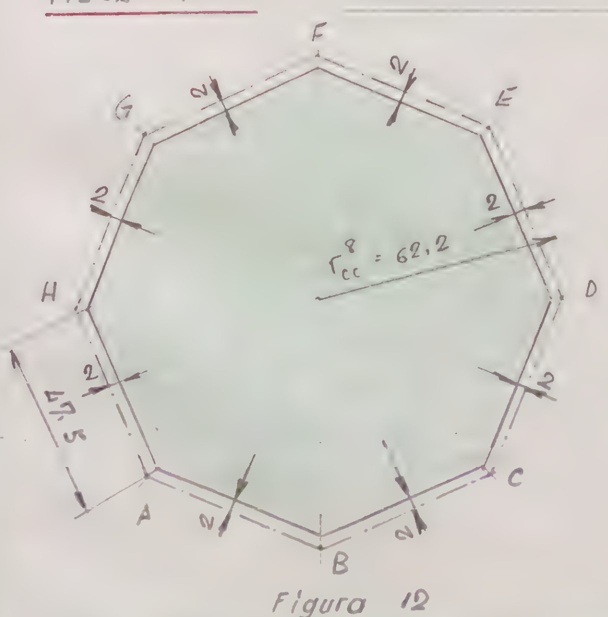


Figura 12

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono ABCDEFGH de la figura 3, y se detallan en la figura 12

PIEZA Nº 12 6 (u)

Figura 12

Álvarez Marzo 1982



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS "ARQUIMEDIANO XI", FORMADO POR OCHO CARAS EXAGONALES (C_6); DOCE CARAS CUADRADAS (C_4), Y SEIS CARAS OCTOGONALES (C_8), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1C_4 + 1C_6 + 1C_8$.

Radio de la esfera circunscrita

$r_{ec}^{XI} = 110$ mm

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO XI" formado por ocho caras exagonales (C_6); doce caras cuadradas (C_4); y seis caras octogonales, concurriendo en cada vértice $1C_4 + 1C_6 + 1C_8$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-43.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ÉSTE EJERCICIO: r_{ec}^{XI} = Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XI} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 12 unidades

Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 12 (c1)

Figura 1

UNE A4 210 x 297



PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

8 unidades

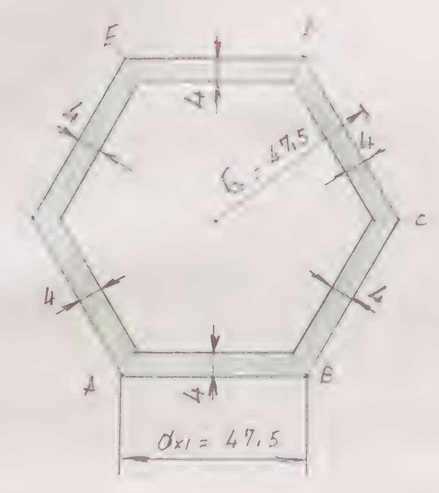


Figura 2

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 8 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES OCTOGONALES REGULARES

6 unidades

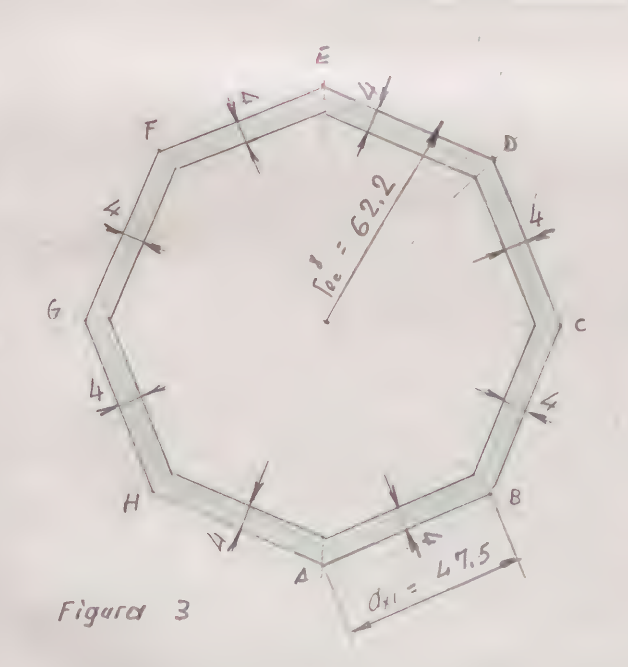


Figura 3

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 6 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 72 unidades

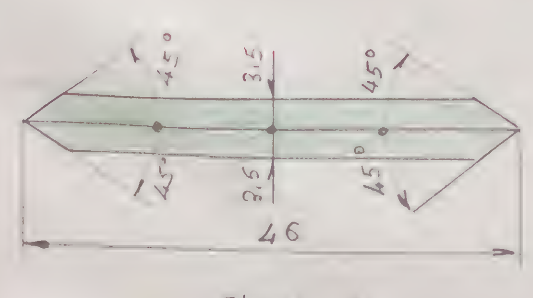


Figura 4

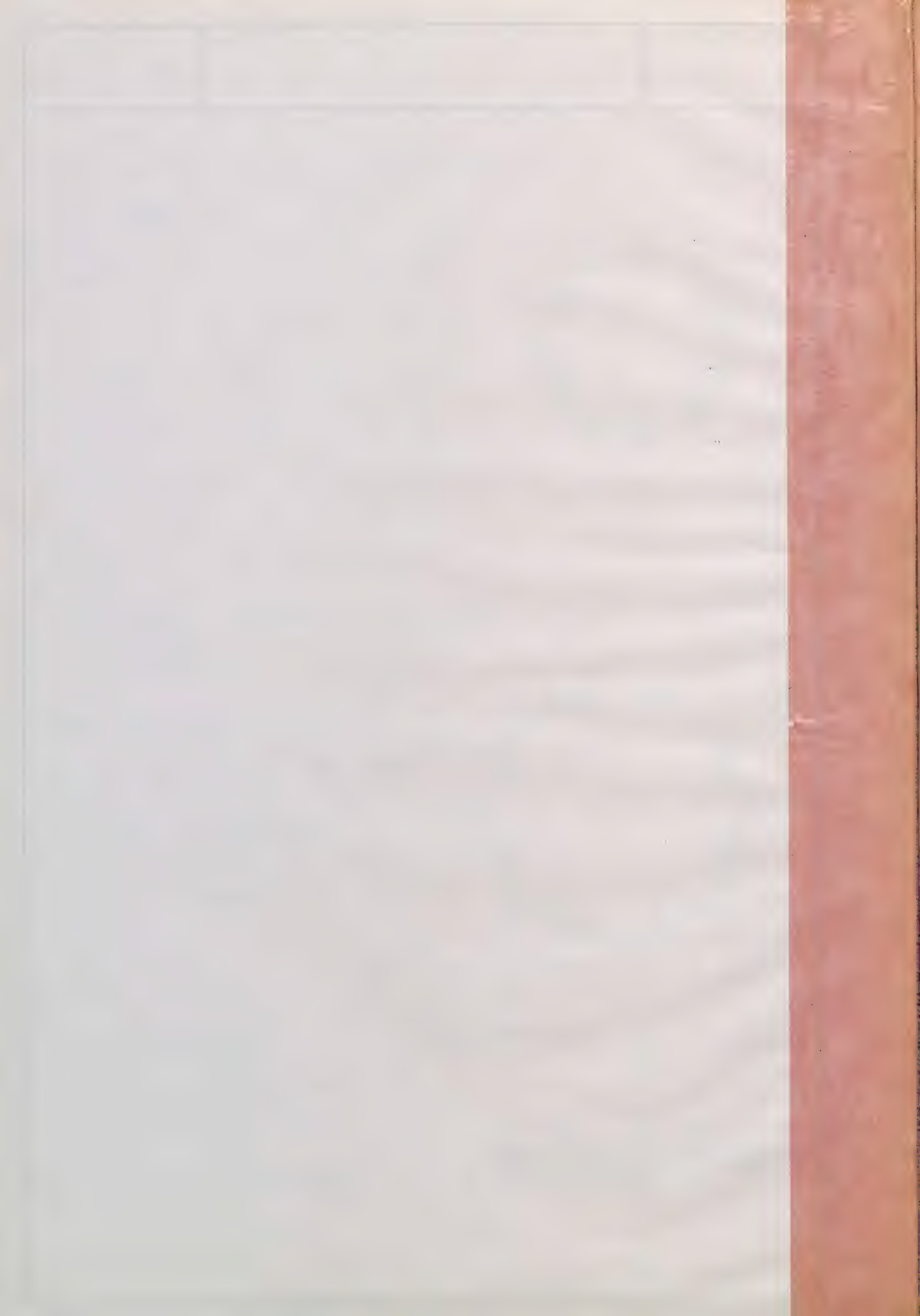
La forma y dimensiones se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 72 (u)

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Mayo 1982



VARIANTE DEL MODELO M - 43.1, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XI} = 76.1 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO XI", formado por doce caras cuadradas (C_4); ocho caras exagonales regulares (C_6) y seis caras octogonales (C_8), concurriendo en cada vértice

$1\,C_4 + 1\,C_6 + 1\,C_8$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-43.1, de igual forma y de menor longitud el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{XI} = 76.1$ mm < 110 mm).

Para obtener el despiezo de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, realizado en M-43.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción "$k = 76.1 : 110$" o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{XI} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

Álvarez Mayo 1982

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-43.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-43.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 12 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1 12 (u)	47.5	32.8

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES 8 unidades

La figura 2, ha de construirse con las mismas cotas modificadas de la figura 1 (47.5 → 32.8)

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES OCTOGONALES REGULARES 6 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

UNE A4 210 x 297



Figura 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 6 (u)	47.5	32.8
	62.2	43.0

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

12 unidades

La figura 4 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4 12 (u)	47.5	32.8
	5.5	4.5

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES.

8 unidades

La figura 5, ha de construirse con las mismas cotas modificadas de la figura 4 (47.5 → 32.8 " 5.5 → 4.5)

PIEZA Nº6 REFUERZO NORMAL EN CARAS OCTOGONALES REGULARES

6 unidades

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-43.3

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 6	47.5	32.8
6 (u)	62.2	43.0
	5.5	4.5

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES 12 unidades

La figura 7, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA nº 7	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 7	71	43
12 (u)	10	10
	2.5	2.5
	7.5	7.5
	45°	45°

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS OCTOGONALES REGULARES 24 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 8	104	64
24 (u)	52	32
	2.5	2.5
	7.5	7.5
	10	10
	45°	45°

UNE A4 210 x 297

[signature] Mayo 1982

		Modelo M - 43.3

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 72 unidades

La figura 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 9 72 (u)	46 4 45°	31.5 3.5 45°

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

12 unidades

La figura 10, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA Nº 10	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 10 12 (u)	47.5 2	32.8 2

PIEZA Nº 11 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES

8 unidades

La figura 11, ha de construirse con las mismas cotas modificadas de la figura 10 (47.5 → 32.8 " 2 → 2)

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO EN CARAS OCTOGONALES REGULARES

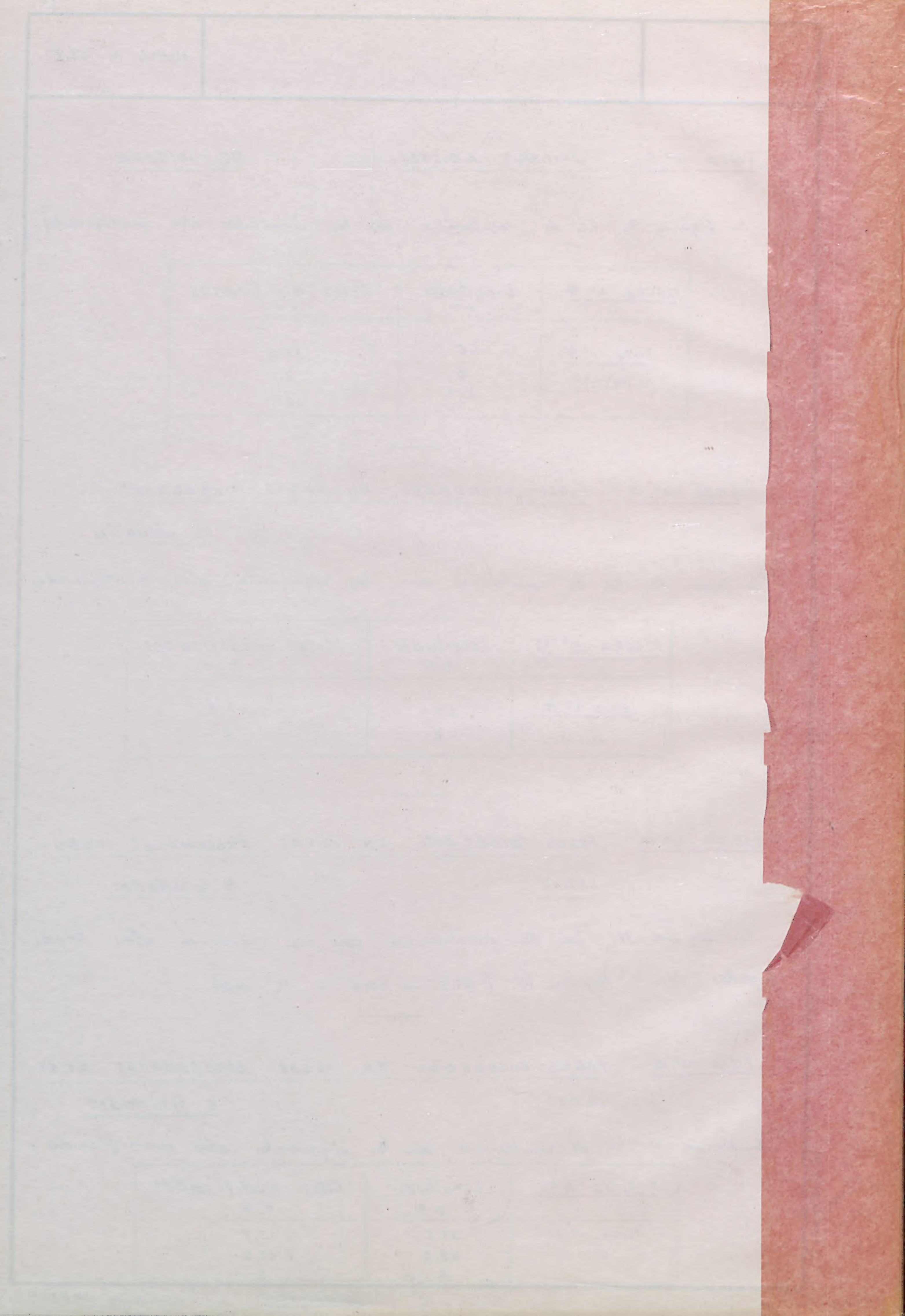
6 unidades

La figura 12, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 11	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 11 6 (u)	47.5 62.2 2	32.8 43.0 2

UNE A4 210 x 297

Calvarde Mayo 1982



colorchecker CLASSIC

calibrite

mm